

משוואות דיפרנציאליות

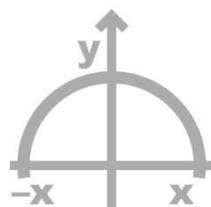



$$\begin{matrix} \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{matrix}$$




$$\begin{matrix} + \\ - \\ 0 \end{matrix}$$


$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1.	משוואות מסדר ראשון	1
22.	משוואות ליניאריות מסדר שני	22
36.	משוואות ליניאריות מסדר ת	36
44.	מערכת משוואות ליניאריות	44
54.	התמרת לפلس	54
66.	נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה	66
77.	פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים	77
82.	טורים עם איברים קבועים	82
96.	טור טיליור - מקלון	96
111.	סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטור חזקות	111
120.	שימושים של משוואות דיפרנציאליות	120
128.	פרק חזרה - אינטגרלים מיידיים	128
133.	פרק חזרה - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"	133
135.	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים	135
139.	אינטגרלים בשיטת הצבה	139
142.	אינטגרלים של פונקציות רצינליות	142
147.	אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות	147
158.	נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה	158

משוואות דיפרנציאליות

פרק 1 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1.	מבוא
1	2. הפרדת משתנים
3	3. משוואה הומוגנית
5	4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$
6	5. משוואה מדוקית
8	6. גורם אינטגרציה
11	7. משוואה לינארית מסדר ראשון
13	8. משוואת ברנולי
14	9. משוואת ריקטי
15	10. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקارد
18	11. פתרונות גרפיים ונוומיים למשוואת מסדר ראשון
20	12. משוואות מסדר ראשון ומעלה גבוהה

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t+c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^3 + 1 \right| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - 1 \right| - \frac{5}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) + 3 \right| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} \right) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 4 \right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$\ln \left(1 + e^{\left(\frac{x}{y} \right)^2} \right) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{x}{t} \right) - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln \left(1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) + c \quad (9)$$

משואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+y+2} \quad (1)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (4)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x - 1.5 \quad (1)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x - 3, \quad y = -x - 1 \quad (2)$$

$$0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k \quad (3)$$

$$\ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right] + c \quad (4)$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$\ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2} + \left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c \quad (5)$$

משוואת מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-6 :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (1)$$

$$\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3 \right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2 \right)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (3)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2 \right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1) \right)dy = 0 \quad (5)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (6)$$

7) נתונה המשוואת $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$, כאשר k קבוע.

- א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k , על מנת שהמשוואת תהיה מדויקת?
- ב. פתרו את המשוואת עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (1)$$

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (2)$$

$$y\sin x + x^2 e^y - y = c \quad (3)$$

$$x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (4)$$

$$\ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c \quad (5)$$

$$x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (6)$$

$$k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c \quad (7)$$

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx + x\cos ydy = 0$ אינה מדוייקת,

ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $.xe^x$.

פתרו את המשוואות בשאלות 4-9:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0 \quad (5)$$

$$(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0 \quad (6)$$

$$(y^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (7)$$

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0 \quad (8)$$

$$y(1) = -1 ; \quad y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4} \quad (9)$$

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 10) נתונה מדייר לא מדוקת

א. הוכחו: אם $e^{\int f(x)dx}$, אז $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכחו: אם $e^{-\int g(y)dy}$, אז $\frac{M_y - N_x}{M} = g(y)$ הוא גורם אינטגרציה.

. $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$ 11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

. $(5x^2 + 3y^3 + 2xy)dx + (3x^2 + 3xy^2 + 6y^3)dy = 0$ 12) נתונה המשוואה

מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

. $(x^2 y^3)dx + (x + xy^2)dy = 0$ 14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא
פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה
 $(y - xy^2 \ln x)dx + xdy = 0$.

. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית

מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $y + x$ בלבד.

תשובות סופיות

$$0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (1)$$

$$e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (2)$$

$$\sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c \quad (3)$$

$$0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (5)$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c \quad (6)$$

$$x - \frac{x}{y} = c \quad (7)$$

$$-\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (8)$$

$$-\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3} \quad (9)$$

(10) שאלת הוכחה.

$$\mu(xy) = (xy)^2 \quad (11)$$

$$\mu(x+y) = (x+y)^2 \quad (12)$$

$$\text{if: } \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM} = h\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{y^2(M_y - N_x)}{yN + xM}} \quad (13)$$

$$\mu = \frac{1}{xy^3} \quad (14)$$

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{if: } \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(xy) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}} \quad (15)$$

$$\text{if: } \frac{M_y - N_x}{N - M} = h(x + y) \quad \text{then: I.F.: } \mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N - M}} \quad (16)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2(y+c) \quad (9)$$

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (3)$$

$$y(1) = 2.5 ; \quad y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (4)$$

$$(\sin x \neq 0) \quad z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (1)$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (3)$$

$$y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e} \quad (4)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}} \quad (5)$$

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (1)$$

$$y' = 1 + (x - y)^2 \quad (2)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}} \quad (1)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (2)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x} \quad (3)$$

משפט הקיום והיחidot על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y(2) = -1$, $y' = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y}$

- א. הוכחו ש- $y_1(x) = -x + 1$, $y_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + y$ הם פתרונות לבעיה.

קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.
ב. הסבירו מדוע קיומם שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y(0) = 0$, $y' = \sqrt[3]{y} + 4$.

- א. הוכחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.
ב. הוכחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.
ג. הוכחו שלבעיה קיימים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y(4) = 0$, $y' = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + x^2 \sin y$

4) נתונה הבעיה $y(0) = 4$, $y' = (y-1)(x^2 + y)^5$.

- א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.
ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $dy = (2x + y^3)dx$.

- א. הראו שעבור $x = y$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון, ופתרו אותה ככזאת.
ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית, מהן נקודות ההתחלה (x_0, y_0) , כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) .
צטוואו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0, y_0) ?

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו 3 קירובי פיקارد לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $\infty \rightarrow n$.

7) כמה פתרונות יש בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} |\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$

8) נתונה בעיית התחלאה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלאה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר המשמי.

תשובות סופיות

- ב. שאלת הסבר.
ג. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
ג. שאלת הוכחה.
- $y(x) = 0$
- א. שאלת הוכחה.
ב. שאלת הוכחה.
- א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.
ב. כל נקודת התחליה (x_0, y_0) , שverbora $\neq 0$.
- הקטע הארוך ביותר: $(0, \infty)$ או $(-\infty, 0)$.
- $y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + x^2, \quad y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}, \quad y_3(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$.
א. $y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$
ב. הוכחה.
- א. אחד.
ב. $[0, 1]$
ג. הוכחה.
- א. $[-0.1, 0.1]$
ב. $[-0.08, 0.08]$
ג. הוכחה.
- א. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
ב. $[-0.5, 0.5]$
ג. הוכחה.
- א. $(0, 1)$ הוכחה.
ב. $(1, 0)$ הוכחה.
ג. $(2, 0)$ הוכחה.

פתרונות גרפים ונומריים למשואה מסדר ראשון

שאלות

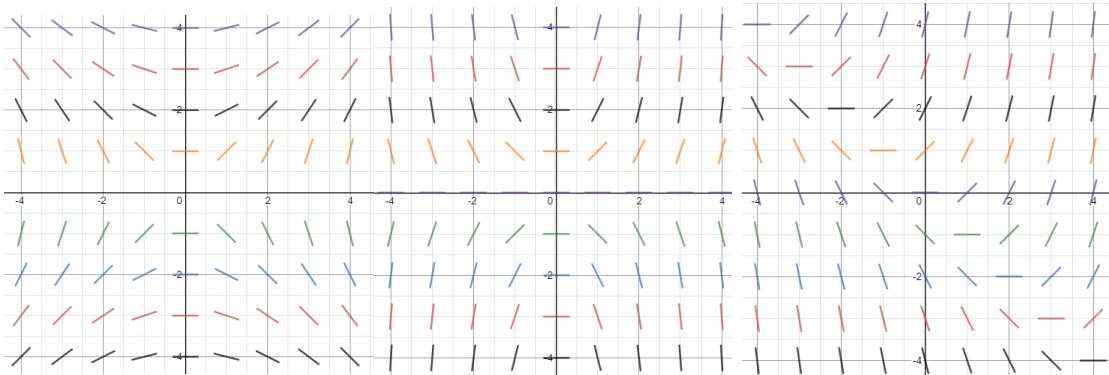
1) שרטטו שדה כיוונים למשואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א-ג' לשדה הכוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

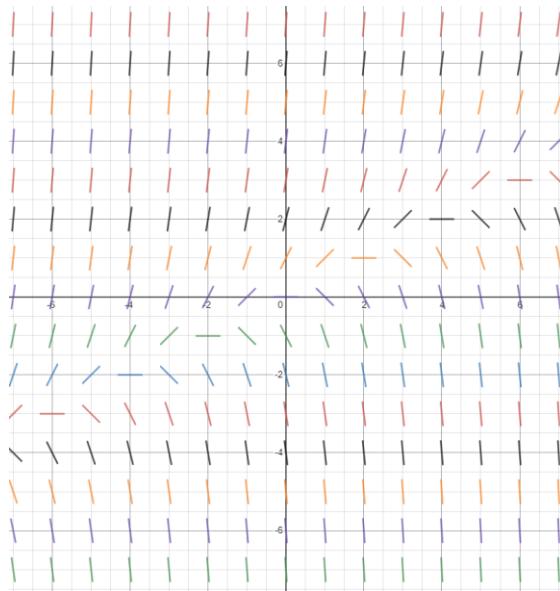
איור 1

3) נתונה המד"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

4) נתונה המד"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות**(1)****(2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$y(1) = 4.593$ **(3)**

$y(2) = 6.95328$ **(4)**

משוואות מסדר ראשון ומעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימונו: בתת-פרק זה נסמן $p = y'$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$(p = y') \quad 4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(p = y') \quad x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (2)$$

$$(p = y') \quad xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (3)$$

$$(p = y') \quad y = 2px + p^4 x^2 \quad (4)$$

$$(p = y') \quad xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (5)$$

$$(p = y') \quad (y > 0) \quad 6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$\left(y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1 \right) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0 \quad (1)$$

$$(\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0 \quad (2)$$

$$\left(y + 0.5x - \frac{c_1}{x} \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2 \right) = 0, \quad x > 0 \quad (3)$$

$$y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2 \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (5)$$

$$6 \left(\frac{c}{y^2} \right)^2 y^2 + 3 \left(\frac{c}{y^2} \right) x - y = 0 \quad (6)$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 2 - משוואות לינאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משואה חסраה - שיטת הורדת סדר המשואה	22
2. משואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים	24
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחס המושכל"	26
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם".	28
5. וריאציות פרמטרים	30
6. רזוננס	31
7. משואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משואה אוילר (ללא ספר)	
8. משואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל	32
9. הוורונסקיאן ו שימושיו	33
10. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני	35

משואה חסירה – שיטת הורדת סדר המשווהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(x \neq 0) \quad x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y'' \tan x - 1 = y' \quad (2)$$

$$2xy' y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (4)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (5)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (6)$$

$$2y'' y - (y')^2 = 1 \quad (7)$$

$$(\cos y \neq 0) \quad y'' \tan y = 2(y')^2 \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (1)$$

$$y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2 \quad (2)$$

$$y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2; y = \pm x + C_3 \quad (3)$$

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2; y = C_3 \quad (4)$$

$$y = e^x (x - 1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} = cx + k ; y = c \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2 (x+k)^4}{4} + 1 \right] \quad (7)$$

$$\cot y = - (cx + k) ; y = c \quad (8)$$

משואה לינארית הומוגנית, עם מקדים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-11:

$$y'' - 100y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (3)$$

$$z(0) = 1, \ z'(0) = 1, \ 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (4)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (5)$$

$$4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (6)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 10y' + 125y = 0 \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \ y'(0) = 3; \ y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (10)$$

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{a^2}y(x) = 0 & (a > 0) \\ y(0) = 4 \\ y(\infty) = y(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

- 12)** נתונה המד"ר $yy'' + (y')^2 = 0$
- הראו כי $y_1 = \sqrt{x}$ ו- $y_2 = 4$ הם פתרונות של המד"ר.
 - הראו כי הפתרון $(x) = y_1(x) + y_2(x)z$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סטייה לעקרון הסופרפויזיה?

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} \quad (1)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{7x} \quad (3)$$

$$z = e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (5)$$

$$x(t) = c_1 e^{\frac{-t}{2}} + c_2 t e^{\frac{-t}{2}} \quad (6)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (7)$$

$$y = e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \quad (8)$$

$$y = e^2 \sin 3x \quad (9)$$

$$y = e^{\frac{-4x}{5}} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5}x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5}x \right) \right] \quad (10)$$

$$y = 4e^{-\frac{|x|}{a}} \quad (11)$$

12) שאלת הוכחה.

השווות מקדמים בשיטת "הניחס המשכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (7)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (8)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (9)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (10)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (9)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (10)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

השווואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 6x^2 \quad (1)$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 7; \quad y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (2)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (3)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (4)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (5)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (8)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (9)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (10)$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (11)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$y = e^x + 4xe^x + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (3)$$

$$y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (5)$$

$$z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x \quad (7)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3 \quad (9)$$

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (10)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (11)$$

$$y = e^{-x} \sin 2x \quad (12)$$

וリアציות פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \quad ; \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (4)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (5)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x| \quad (1)$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-2x} [\ln x - 1] \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} \left[2(x+1)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0) \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1 + e^{-x}) - (1 + e^{-x})] \quad (5)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x \quad (6)$$

רזוננס

שאלות

(1) נתונה המשוואה הבאה המכילה את הפרמטר a :
 $y'' + (2a^2 - 3a + 2)y = \sin ax$
 מצאו את כל הערכים של a המתאימים לרזוננס במערכת.

(2) נתונה המשוואה הבאה המכילה את הפרמטר a :
 $y'' + (5a + 1)y = \cos(a + 1)x$
 מצאו את כל הערכים של a המתאימים לרזוננס במערכת.

(3) נתונה המשוואה הבאה המכילה את הפרמטרים a ו- b :
 $y'' + (a^2 - 5a + 13)y = 4e^{(b+1)x} \sin(a + 2)x$
 מצאו את כל הערכים של a ו- b המתאימים לרזוננס במערכת.

תשובות סופיות

$$a = 1, a = 2 \quad (1)$$

$$a = 0, a = 3 \quad (2)$$

$$a = 1, b = -1 \quad (3)$$

משואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y_1(x) = e^{2x}$, $y'' + \tan x \cdot y' - (2 \tan x + 4)y = 0$

2) פתרו $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(0 < x < 1), \quad (1-x)y'' + x \cdot y' - y = 2(1-x)^2 e^{-x},$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x) = e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} (\sin x - 4 \cos x)$

2) $y = c_1 x + c_2 (x^2 + 1)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיין ו שימושיו

שאלות

1) האם ניתן כי $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע $[0, \pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x) = \sin x^2$, $y_2(x) = \cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $y'' - 4x^3y = 0$, בקטע $(-\infty, \infty)$.
חשבו את ההוורונסקיין של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x = 0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ הן פתרונות של המשוואה $y'' - \frac{2}{1+2x}y' - \frac{2x+3}{1+2x}y = 0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1 = x^3$, $y_2 = |x^3|$, בקטע $[-4, 4]$.
א. חשבו את ההוורונסקיין של הפונקציות בקטע.
ב. בדקו האם הפונקציות תלויות ליניארית בקטע.
ג. האם ניתן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלות מקדמים רציפים?
ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy'' - 2y' = 0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:
א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I , ונניח כי ההוורונסקיין שלהם שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משווהה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.
ב. רשמו משווהה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $0 < x < x_0$, שהפונקציות $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^4$ הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר בקטע I , כאשר q, p רציפות בקטע I .

הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c) = y_2(c) = 0$ אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

(1) לא.

(2) $W = -2x$

(3) כן.

(4) א. $W = 0$. ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

(5) א. שאלת הוכחה. ב. $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = 0$.

(6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $x y'' - 4y = 12x$.

א. פתרו את המשוואה.

$$\text{ב. מצאו פתרון המקיים: } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 11 \end{cases}$$

$$\text{ג. נסו למצוא פתרון המקיים: } \begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0) = 1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

$$2) \text{נתונה הבעה: } \begin{cases} x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

הראו כי $y_1(x) = x^2$ ו- $y_2(x) = 1$, הם פתרונות של הבעה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משווהה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$, כך שהfonקציות $y = 4x$ ו- $y = \sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

$$1) \text{א. } x y'' - 3x y' - 3y = 4e^{2x} - 3e^{-2x} \quad \text{ב. } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

משוואות דיפרנציאליות

פרק 3 - משוואות לינאריות מסדר ח

תוכן העניינים

1. משואה חסירה מסדר שלישי	36
2. משואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים	37
3. שיטת השוואת מקדמים	40
4. שיטת וריאצית הפרמטרים	42
5. משואת אוילר מסדר שלישי (ללא ספר)	
6. הורונסקיון ושימושו	43

משואה חסраה מסדר שלישי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$, y' y''' - (y'')^2 - 3y''(y')^2 - 4(y')^4 = -16y(y')^3 \quad (1)$$

עם תנאי ההתחלה $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = -12$

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y''' - \frac{(y'')^2}{y'} = y''y' - 2(y')^2 y \\ y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$3y'''y - y'y'' = 0 \quad (4)$$

$y(1) = 1, y'(1) = 3, y''(1) = 6$

$$\begin{aligned} (y'y''' - 2(y'')^2)y^2 &= -(y')^4 \\ y > 0 \\ y(1) = y'(1) = y''(1) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln |-3 + 4y| = x + \frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 \quad (2)$$

$$y = \tan x - 1 \quad (3)$$

$$y = x^3 \quad (4)$$

$$y = e^{x-1} \quad (5)$$

משואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-15:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0 \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = 0 \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0 \quad (4)$$

$$y^{(4)} - y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 20y = 0 \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y = 0 \quad (7)$$

$$y^{(6)} - y'' = 0 \quad (8)$$

$$(D^5 + 3D^4 + 2D^3 - 2D^2 - 3D - 1)y = 0 \quad (9)$$

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0 \quad (10)$$

$$z''' - 6z'' + 12z' - 8z = 0 \quad (11)$$

$$y^{(4)} - 4y = 0 \quad (12)$$

$$x^{(6)} - 3x^{(4)} + 3x'' - x = 0 \quad (13)$$

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 6y' - 12y + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \\ y''(0) = -19 \\ y'''(0) = -47 \end{cases} \quad (15)$$

- 16)** נתונה משוואה דיפרנציאלית הומוגנית עם מקדמים קבועים מסדר 6, אשר אחד הפתרונות שלה הוא $x^2 e^x \cos 2x$.
- מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה.
 - מצאו את המשוואה.

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{0x} [c_3 \cos x + c_4 \sin x] \quad (5)$$

$$y = c_1 e^{-4x} + e^x [c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x] \quad (6)$$

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \quad (7)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + \cos x + \sin x \quad (8)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x} + c_5 x^3 e^{-x} \quad (9)$$

$$y = e^x [c_1 \cos x + c_2 \sin x] + x e^x [c_3 \cos x + c_4 \sin x] + \\ + e^{-x} [c_5 \cos x + c_6 \sin x] + x e^{-x} [c_7 \cos x + c_8 \sin x] \quad (10)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} \quad (11)$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} + c_3 \cos \sqrt{2}x + c_4 \sin \sqrt{2}x \quad (12)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \quad (13)$$

$$y = e^x + 2 \cos x + 3 \sin x \quad (14)$$

$$y = e^x - 2 e^{2x} + 3 \cos 2x + 4 \sin 2x \quad (15)$$

$$y = e^x [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x] + x e^x [c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x] + \\ + x^2 e^x [c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x] \quad (16)$$

$$y''''' - 6y'''' + 27y''' - 68y'' + 135y' - 150y + 125y = 0 . \blacksquare$$

שיטת השוואת מקדמים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 4\cos x \quad (1)$$

$$y^{(4)} + 3y''' - 15y'' - 19y' + 30y = -28e^{2x} \quad (2)$$

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14 \quad (3)$$

$$y''' - 3y' + 2y = e^x \quad (4)$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x} + \sin x \quad (1)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-5x} + e^{2x} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + x^3 + 4 \quad (3)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{6} x^2 e^x \quad (4)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \frac{1}{4} x (\cos x - \sin x) \quad (5)$$

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} \quad (6)$$

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + \frac{1}{4} x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \quad (7)$$

שיטת וריאצית הפרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1+e^{-x}} \quad (2)$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y = c_1 + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x + \ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| - x \cos x + \sin x \ln |\cos x| \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(e^x + 1 - \ln(e^x + 1) \right) + e^x \left(-\ln(e^x + 1) \right) + e^{2x} \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x}) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x - \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x \ln |x| \quad (3)$$

הוורונסקיין ו שימושיו

שאלות

- 1)** האם קיימת מד"ר מהצורה $y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ בעלת מקדמים רציפים בקטע $[-1, 1]$, כך שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה?
- 2)** נתונות הפונקציות $y_1(x) = 4 - x$, $y_2(x) = 4 + x$, $y_3(x) = 20 + x$.
 א. חשבו את הוורונסקיין של הפונקציות.
 ב. קבעו האם הפונקציות תלויות בקטע $(-\infty, \infty)$.
 ג. ענו שוב על סעיף ב', במידעה שלוש הפונקציות הן פתרונו של המד"ר $y''' = 0$.
- 3)** פתרו את הסעיפים הבאים:
 א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ פונקציות גזירות ברציפות שלוש פעמיים בקטע I , ונניח כי הוורונסקיין שלהם שונה מאפס ב- I . הוכיחו כי קיימת משווהה הומוגנית מסדר 3, בעלת מקדמים רציפים בקטע I , כך ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ הם פתרונות שלה.
 ב. רשמו משווהה לינארית, הומוגנית, מסדר שלישי, עם מקדמים רציפים, שהפונקציות $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ הן פתרונות שלה.

תשובות סופיות

- 1)** לא. הפונקציות מתאפסות רק בנקודת אחת $x = 0$.
- 2)** א. $W = 0$. ג. הפונקציות תלויות.
- 3)** א. שאלת הוכחה. ב. $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$, $x \neq 0$.

משוואות דיפרנציאליות

פרק 4 - מערכת משוואות לינאריות

תוכן העניינים

1. כללי	(ללא ספר)
2. חזורה מאלגברה לינארית - ערכיים עצמאיים, וקטוריים עצמאיים.....	44
3. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת הלכsono	3
4. מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים - שיטת וריאציות הפרמטרים	46
5. מערכת משוואות כללית - שיטת ההצבה	51
	53

חזרה אלgebra לינארית – ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

שאלות

בשאלות הבאות מצאו את הערכים העצמיים והווקטוריים העצמיים של A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \quad v_{x=0} = (-1, 0, 1), \quad v_{x=1} = (0, 1, 0), \quad v_{x=2} = (1, 0, 1) \quad (1)$$

$$x=6, \quad x=2, \quad x=-4, \quad v_{x=6} = (0, 0, 1), \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-4} = (-1, 1, 0) \quad (2)$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad v_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1) \quad x_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0) \quad (3)$$

$$x=1, \quad x=3, \quad x=-2, \quad v_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad v_{x=3} = (1, 2, 1), \quad v_{x=-2} = (-1, 1, 1) \quad (4)$$

$$x=1, \quad x=4, \quad x=-1, \quad v_{x=1} = (1, -2, 1), \quad v_{x=4} = (1, 1, 1), \quad v_{x=-1} = (-1, 0, 1) \quad (5)$$

$$x=-1, \quad x=3 \quad v_{x=-1} = (-1, 2), \quad v_{x=3} = (1, 2) \quad (6)$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2i, \quad v_{x=1+2i} = (1+i, 2), \quad v_{x=1-2i} = (1-i, 2) \quad (7)$$

$$x=1, \quad x=1+\sqrt{3}i, \quad x=1-\sqrt{3}i, \quad v_{x=1} = (1, 1, 1), \quad , \quad (8)$$

$$v_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad v_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת הלכソン

שאלות

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 1-2:

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (1)$$

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\cdot \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ כך ש}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ נtauן } \quad (3)$$

הוכיחו כי $z(t) = y(t)$

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 4-5:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z \\ y' = 3x + 2y - z \\ z' = 2x + y - z \end{cases} \quad (4)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (5)$$

$$\cdot \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{כך ש}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ נtauן } \quad (6)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

7) פתרו את מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 - 2y_2 = 0 \\ 3y_2' - 4y_1 - 5y_2 = 0 \end{cases}$$

8) פתרו :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ כאשר } \vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$$

הערה : בשאלות 7 ו-8 יש להגיע לפתרון המורכב מהפתרונות ממשי.

פתרו את מערכות המשוואות בשאלות 9-14 :
(שימוש לב שכל המערכות אין ניתנות ללבסן)

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (9)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (10)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (11)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (12)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (13)$$

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (14)$$

15) דמי פתר את המערכת $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} x(t)$

$$\cdot x(t) = c_1 e^{-1t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 {}^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{0t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\cdot x(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

נתון תנאי התחלה :

עבור אילו ערכים של קבועים a, b, c , הפתרון המקיים את תנאי התחילה הנתון יהיה חסום לכל t ממשי?

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{-4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$z(t) = y(t) \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

0 (6)

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad (7)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left[\cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ c_3 e^t \left[\sin \sqrt{3}t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \cos \sqrt{3}t \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (8)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0.5t^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2 - t + 2 \\ \frac{t^2}{2} + 1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{1t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t-1 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + c_4 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ t-2 \\ \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -4t \\ -2t \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$a = -c, \quad b = 2a \quad (15)$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון, לא הומוגניות, עם מקדמים קבועים – שיטת וריאצית הפרמטרים

שאלות

פתרו את מערכת המשוואות בשאלות 4-1 :

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^{at} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 - 2e^{at} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2e^{-t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + 4e^{-t} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x' &= x + 2z + e^t \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= 2x + y + z + e^t \end{aligned} \quad (4) \quad \underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 18t \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(5) המירו את המשוואת $y''' + y'' - 2y = t^2$, $y''' + y'' - 2y = t^2$
במערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון.

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 8t+3 \\ -3t+3 \\ t+3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(7) נתונה המשדר $e^{-x} y'''(x) - y''(x) + e^x x^2 y'(x) = 5e^{-x}$.
רשמו את המשדר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בצגה מטריצионаית.

(8) נתונה המשדר $x^2 y''(x) + (1+4x^2) y(x) = \ln x$.
רשמו את המשדר כמערכת משוואות ליניאריות מסדר ראשון,
בצגה מטריצionaית.

הערה: בשאלות 7 ו-8 המערכת המתבקשת היא לא עם מקדמים קבועים.
יחד עם זאת, הדרישה היא רק להציג את המערכת ולא לפתור אותה.

תשובות סופיות

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} : \text{ עבור } a = -1 \text{ נקבל}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} e^{at} \\ -2e^{at} \end{pmatrix} : \text{עבור } a \neq 1 \text{ נקבל}$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t+2) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - (3t+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3t+1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3} t e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9} e^t \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2e^{-5t} \\ e^{-5t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{-t} \\ (2t-1)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t-1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -e^{2t}t^2 & e^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{1}{t^2} + 4\right) & -\frac{10}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ln t \end{pmatrix} \quad (8)$$

מערכת משוואות כללית – שיטת הצבה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} y'' + 2z' = e^{3x} \\ y' - z'' + 3z = x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$. z(0) = y(0) = y'(0) = 0, \text{ בהינתן} \quad \begin{cases} y'' + z' = e^{-2x} \\ y + z = \sin x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y + e^t \\ y' = 6x - 3y + e^{-t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + \sin 2t \\ x_2' = x_1 + x_2 + \cos 2t \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} z'' - 3z' + 2z + y' - y = 0 \\ z' - 2z + y' + y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{24} e^{3x} + x^2, \quad y = \frac{1}{12} e^{3x} - \frac{2}{3} x^3 - 2c_2 e^x + 2c_3 e^{-x} + kx + l \quad (1)$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^x - \frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x, \quad y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{6} e^{-2x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \quad (2)$$

$$x = c_1 + c_2 e^t + 4te^t - e^{-t}, \quad y = 2c_1 + \frac{3}{2} c_2 e^t + 6te^t - \frac{3}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} \quad (3)$$

$$x_1 = c_1 + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad x_2 = -c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{1}{4} \sin 2t \quad (4)$$

$$z = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}, \quad y = 2c_1 + \frac{1}{2} c_2 e^x \quad (5)$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 5 - התרמת לפلس

תוכן העניינים

54	1. התרמת לפلس
57	2. התרמת לפلس הפוכה
61	3. פתרון מדר בעזרת התרמת לפلس
63	4. נוסחאות - התרמת לפلس

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נסחאות להתרמת לפלס.

שאלות

חשבו את התרמות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התרמות לפלס:

$$L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (2)$$

$$L(\cosh 4t) \quad (4)$$

$$L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6)$$

$$L(\sin^2 t) \quad (8)$$

$$L(t^2 \sin 4t) \quad (10)$$

$$L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12)$$

$$L(t^2 + 4t - 2) \quad (1)$$

$$L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3)$$

$$L(\sinh 10t) \quad (5)$$

$$L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7)$$

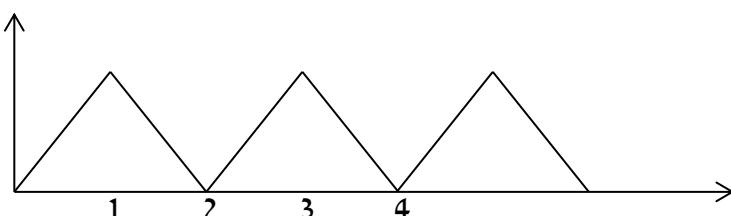
$$L(\cos^2 4t) \quad (9)$$

$$L(t^4 e^{2t}) \quad (11)$$

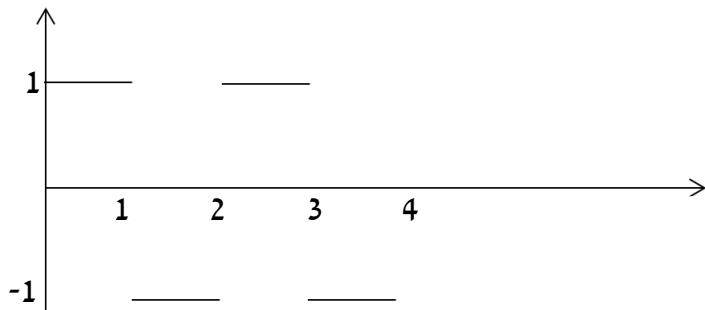
13) מצאו את התרמת לפלס של הפונקציה $\cdot g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$

14) מצאו את התרמת לפלס של הפונקציה $\cdot g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$

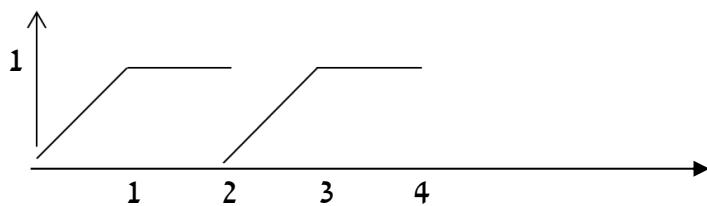
15) מצאו את התרמת לפלס של הפונקציה המוחזורת הבאה:



16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18) הגדרו ושרטטו את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$ בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתרמת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,

של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$.

22) חשבו את התרמת לפpls של הפונקציה המחזורית הבאה :
 $\cdot g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$

23) חשבו את התרמת לפpls של הפונקציה המחזורית הבאה :
 $\cdot g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$

24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדרו ושרטטו את פונקציית הדלתא $(t)\delta$.

ב. מהי התרמת לפpls של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה ?

תשובות סופיות

$$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2 + 16} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad (8)$$

$$\frac{8(3s^2 - 16)}{(s^2 + 16)^3} \quad (10)$$

$$\frac{4}{(s-2)^2 + 16} \quad (12)$$

$$\frac{1-2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \quad (16)$$

$$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$

$$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2 + 25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 64} \quad (9)$$

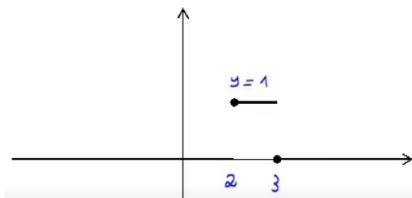
$$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$

$$\frac{1-e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$

$$\frac{1-2e^{-s} + e^{-2}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (15)$$

$$\frac{1-e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})} \quad (17)$$

(19)



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathbf{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4t}L(t) + 16 \frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמורות בשאלות 1-29:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

*בשאלה 27 כתבו את התוצאה بصورة מפורטת וشرطו אותה.

$$\text{נתון } (30) . F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את $f(t) = L^{-1}(F(s))$, כאשר $f(\infty)$ ו- $f(0)$
פתרו בשתי דרכים שונות.

$$\text{הערה: } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

(31) הסבירו והציגו את משפט הקונволוציה.

השתמשו במשפט הקונולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

תשובות סופיות

$$\frac{t^3}{3!} \quad \text{(2)} \qquad \qquad \qquad 1 \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{3} \sin 2t \quad \text{(4)} \qquad \qquad \qquad e^{10t} \quad \text{(3)}$$

$$e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{(6)} \qquad \qquad \qquad \cos 2t \quad \text{(5)}$$

$$\frac{1}{4} t \sin 2t \quad \text{(8)} \qquad \qquad \qquad e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\} \quad \text{(7)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}} \quad \text{(10)} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{4} t \sin 2t \quad \text{(9)}$$

$$1 - 2e^{-5t} \quad \text{(12)} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \quad \text{(11)}$$

$$1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \quad \text{(14)} \qquad \qquad \qquad 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \quad \text{(13)}$$

$$e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t} \quad \text{(16)} \qquad \qquad \qquad e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t} \quad \text{(15)}$$

$$-6 + 5t + 6e^{-2t} \quad \text{(18)} \qquad \qquad \qquad e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t} \quad \text{(17)}$$

$$2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t} \quad \text{(20)} \qquad \qquad \qquad 4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t} \quad \text{(19)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t \quad \text{(22)} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t \quad \text{(21)}$$

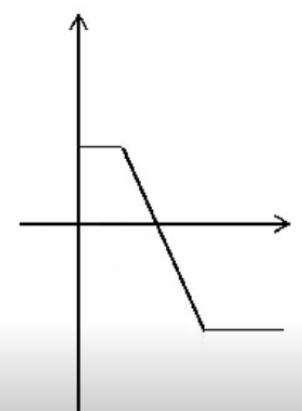
$$\cos t + e^{-2t} \quad \text{(24)} \qquad \qquad \qquad \sin t + 2e^{3t} \quad \text{(23)}$$

$$\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{(25)}$$

$$e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t) \quad \text{(26)}$$

$$3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3) . \text{ נ } \quad \text{(27)}$$

$$; \text{ שרטוט :} \quad \begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases} . \text{ ב}$$



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)\left(e^{t-10} - e^{2(t-10)}\right) \quad (29)$$

$$f(0)=2 \quad f(\infty)=3 \quad (30)$$

(31) שאלת הסבר.

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

פתרונות מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס :

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1 , y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1 , y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$, y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ כאשר } u(t) \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$. h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר } y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 , y''(0) = 3 ; y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10 \cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0 , y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2 , y'(0) = -3 ; y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t-2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0 , y'(0) = 0 ; -y'' + 4y = \delta(t-2\pi) - \delta(t-\pi) \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t}(5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8}e^t(t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4)(0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2) \frac{1}{6}[1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2\sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi)e^{-(t-\pi)} \sin(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{4}{7}u(t-2)[e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}u(t-2\pi)[\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2}u(t-\pi)[\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

נוסחאות – ההתמרה לפולס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n (for $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$)
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$
$\frac{a}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \sin at$

$\frac{s+b}{[(s+b)^2 + a^2]}$	$e^{-bt} \cos at$
$\frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin at$
$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$	\sqrt{t}
$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks} \cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n (F(s))^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$ ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
 אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$f(t)^* g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$ - קונולציה:

$$L(f(t)^* g(t)) = F(s) \cdot G(s)$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t)^* g(t) \quad L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 6 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

66	1. קוואורדינטות קוטביות
68	2. הנגורת ושימושה
69	3. שימושי האינטגרל המסתויים

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הkartזית $(-1, -1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10, -\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.
- ב. המירו את הנקודה הkartזית $(0, -4)$ לנקודה קוטבית.
- ג. המירו את הנקודה הkartזית $(2, 2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $x^2 - xy - 4 = 1$ לקואורדינטות קוטביות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = -4 \cos \theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $y^2 + x^2 = 4y$ לקואורדינטות פולריות.
- ב. המירו את המשוואה $x = 10$ לקואורדינטות פולריות.
- ג. המירו את המשוואה $y = 4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. המירו את המשוואה $r = 4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ב. המירו את המשוואה $\theta = \pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ג. המירו את המשוואה $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.
- ד. המירו את המשוואה $6r^3 \sin\theta = 4 - \cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

תשובות סופיות

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right) \text{ ב. } (x, y) = (2, 2\sqrt{3}) \text{ א. } \mathbf{(1)}$$

$$(r, \theta) = \left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ג. } (r, \theta) = \left(4, \frac{3\pi}{2} \right) \text{ ב. } (x, y) = (5, -5\sqrt{3}) \text{ א. } \mathbf{(2)}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \text{ ב. } 4r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta = 1 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta \text{ א. } \mathbf{(3)}$$

$$r \sin \theta = 4 \text{ ג. } r \cos \theta = 10 \text{ ב. } r = 4 \sin \theta \text{ א. } \mathbf{(4)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \text{ ג. } y = x \text{ ב. } x^2 + y^2 = 4^2 \text{ א. } \mathbf{(5)}$$

$$6 \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \cdot y = 4 \sqrt{x^2 + y^2} - x \text{ ט}$$

הנגזרת ושימושה

שאלות

1) מצאו את המשוואת המשיק לעקום $r = 3 + 8 \sin \theta$ בנקודה $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2) מצאו את המשוואת המשיק לעקום $r = 1 - 2 \sin \theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

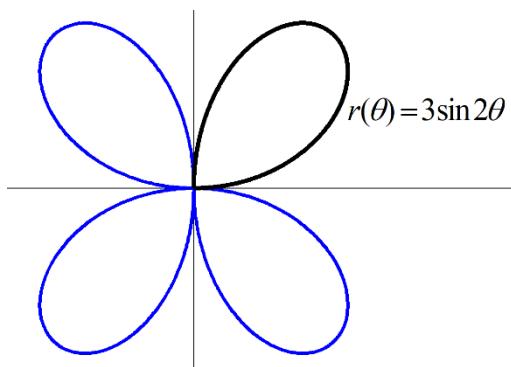
$$y = \frac{11\sqrt{3}}{5}x - \frac{98}{5} \quad (1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad (2)$$

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

- 1) חשבו את השטח של הלולה הפנימית של $r = 2(1 + 2 \cos \theta)$.
- 2) חשבו את השטח הכלוא בתווך $r = 6 + 4 \cos \theta$ ומשמאלי לציר ה- y .
- 3) חשבו את השטח הכלוא בתווך $r = 3 + 2 \sin \theta$.
- 4) חשבו את השטח המוגבל בתווך $r = 3 + 2 \sin \theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- 5) חשבו את השטח המוגבל בתווך $r = 2 + 3 \sin \theta$ ומחוץ ל- $r = 2$.
- 6) חשבו את השטח המוגבל בתווך $r = 2 + 3 \sin \theta$ ובתווך $r = 2$ ובעיגול.
- 7) חשבו את השטח הכלוא בתווך המעגל $r = 2 \sin \theta$ ומחוץ למעגל $r = 1$.
- 8) מצאו את אורך הקרדיויאידה $r = 1 + \cos \theta$.
- 9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r = 3 \sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



- 10) מצאו את אורך העקום $r = \theta$, כאשר $0 \leq \theta \leq 1$.
- 11) העקום $r = \cos \frac{\theta}{2}$, כאשר $0 \leq \theta \leq \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעתפת של הגוף הנוצר?

12) העקום $r = 4 + 4 \sin \theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

$$S = 4\pi - 6\sqrt{3} = 2.174 \quad (1)$$

$$S = 22\pi - 48 \quad (2)$$

$$S = 11\pi \quad (3)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187 \quad (4)$$

$$S = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196 \quad (5)$$

$$10.37 \quad (6)$$

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

$$8 \quad (8)$$

$$\ell = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2\theta} d\theta \quad (9)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2 + \ln(\sqrt{2} + 1)}}{2} \quad (10)$$

$$S_x = \pi \quad (11)$$

$$S_y = 102.4\pi \quad (12)$$

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קוויים

- הימני $x = a$. (1)

- הימני $y = b$. (2)

- הימני העובר דק' הראשית $y = (\tan \beta)x$. $\theta = \beta$ (3)

מעגלים

- מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו a . $r = a$. 1

- מעגל שמרכזו בנקודה $(a, 0)$ ורדיוסו $|a|$. $r = 2a \cos \theta$. 2

- מעגל שמרכזו בנקודה $(0, b)$ ורדיוסו $|b|$. $r = 2b \sin \theta$. 3

. $\sqrt{a^2 + b^2}$ - מעגל שמרכזו בנק' (a, b) ורדיוסו $r = 2a \cos \theta + 2b \sin \theta$. 4

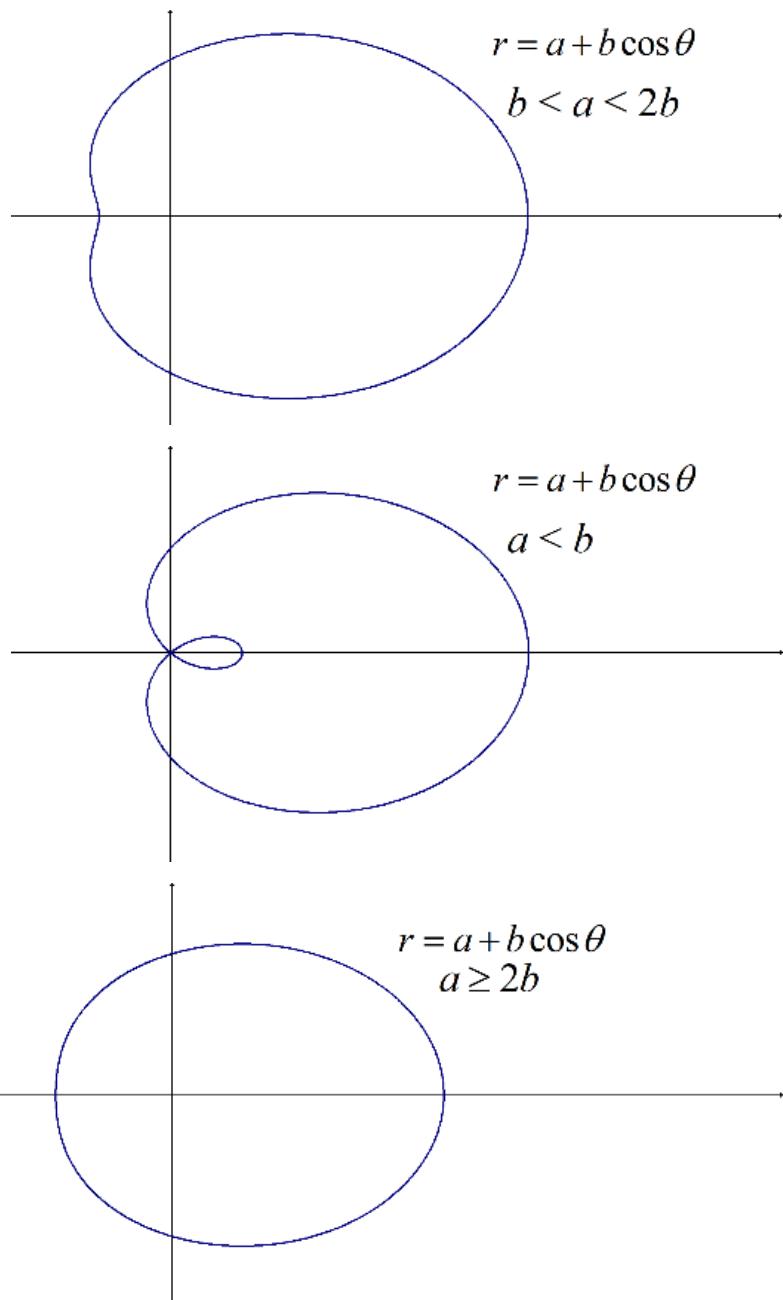
קרדיודות ולמניסקטות

(1) קרדיוודות : $r = a \pm a \cos \theta$, $r = a \pm a \sin \theta$ גראף בצורת לב שמכיל את הראשית.

(2) למניסקטות עם לולאה פנימית : $(a < b)$ $r = a \pm b \cos \theta$, $r = a \pm b \sin \theta$ גראף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

(3) למניסקטות ללא לולאה פנימית : $(a > b)$ $r = a \pm b \cos \theta$, $r = a \pm b \sin \theta$ גראף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

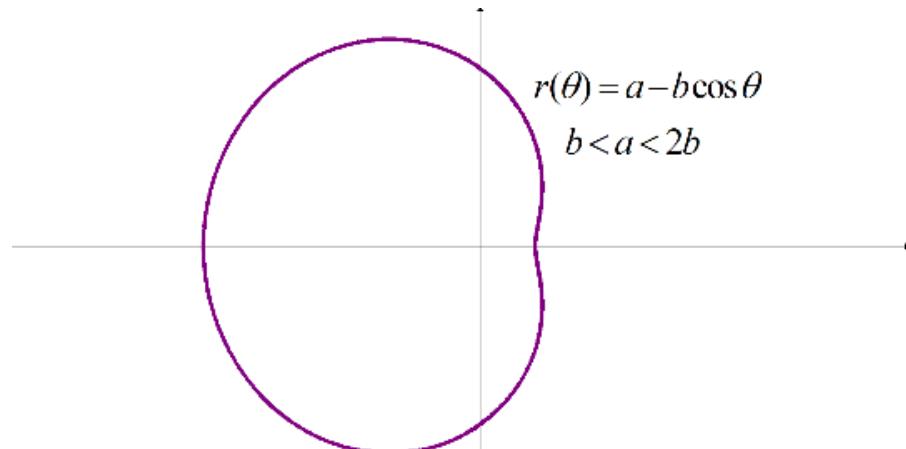
* נדרש בדרך כלל עבור מחזורי שלם $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

למינסקוטות ביתר פירות
הגרף של $r = a + b \cos \theta$


הגרף של

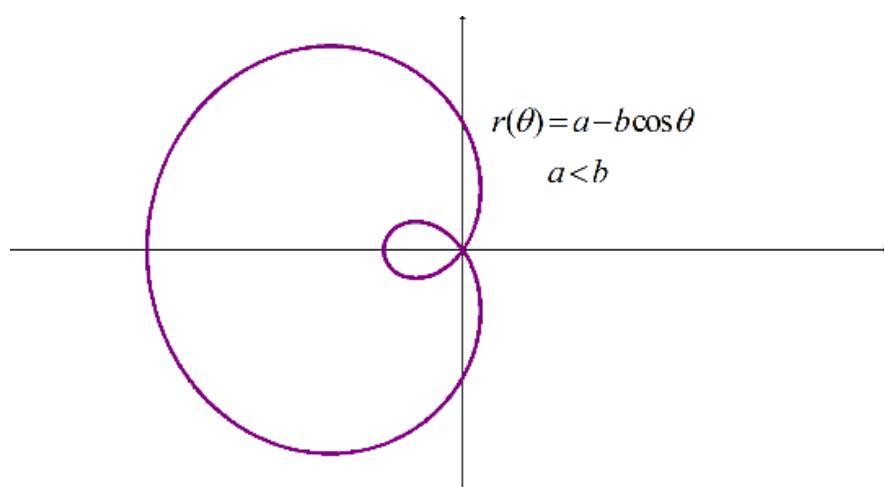
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$b < a < 2b$$



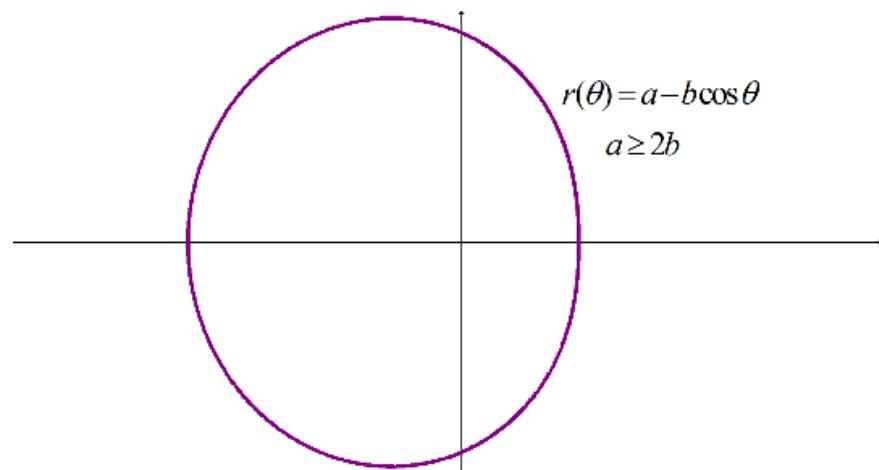
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$a < b$$



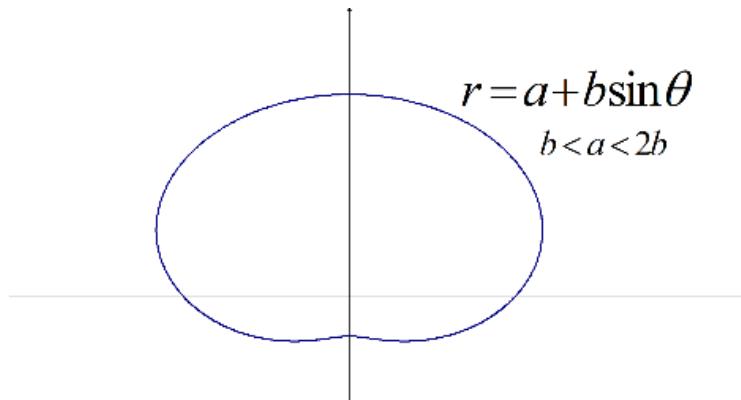
$$r(\theta) = a - b \cos \theta$$

$$a \geq 2b$$

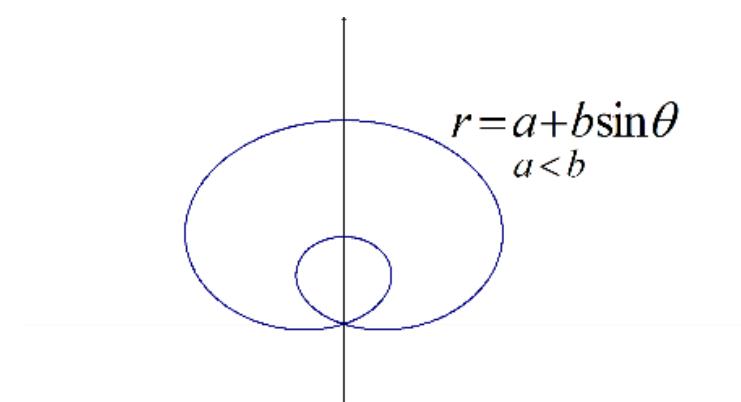


הגרף של

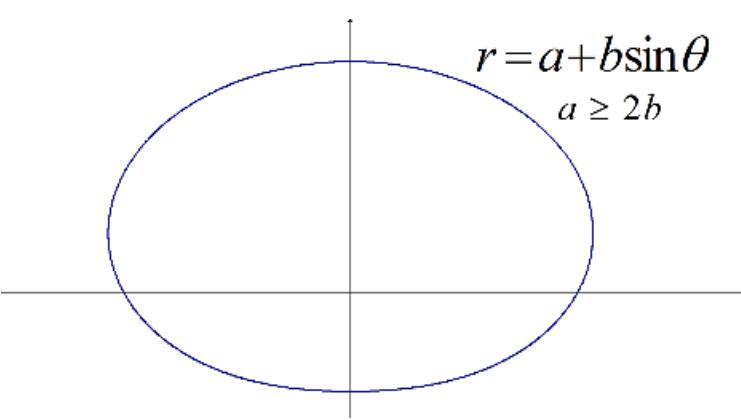
$$r = a + b \sin \theta$$
$$b < a < 2b$$



$$r = a + b \sin \theta$$
$$a < b$$



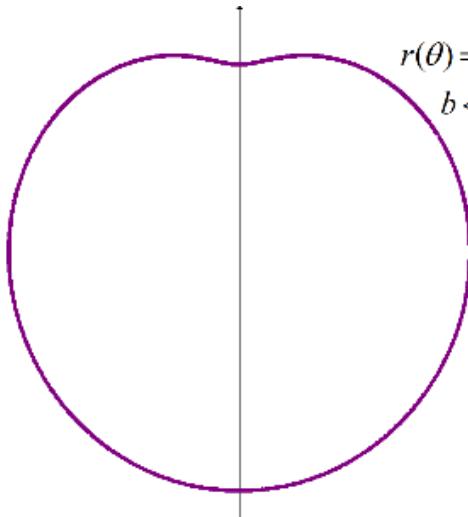
$$r = a + b \sin \theta$$
$$a \geq 2b$$



הגרף של

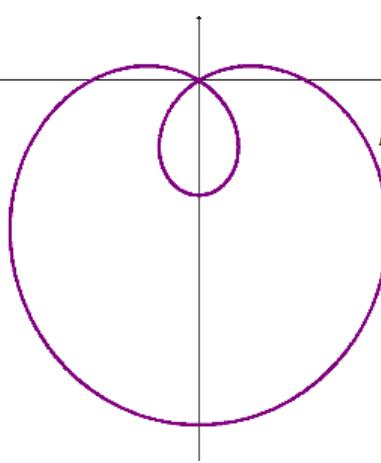
$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$

$$b < a < 2b$$



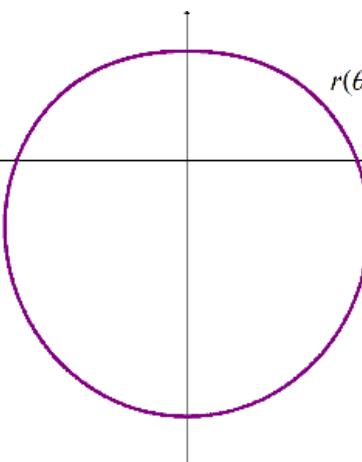
$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$

$$a < b$$

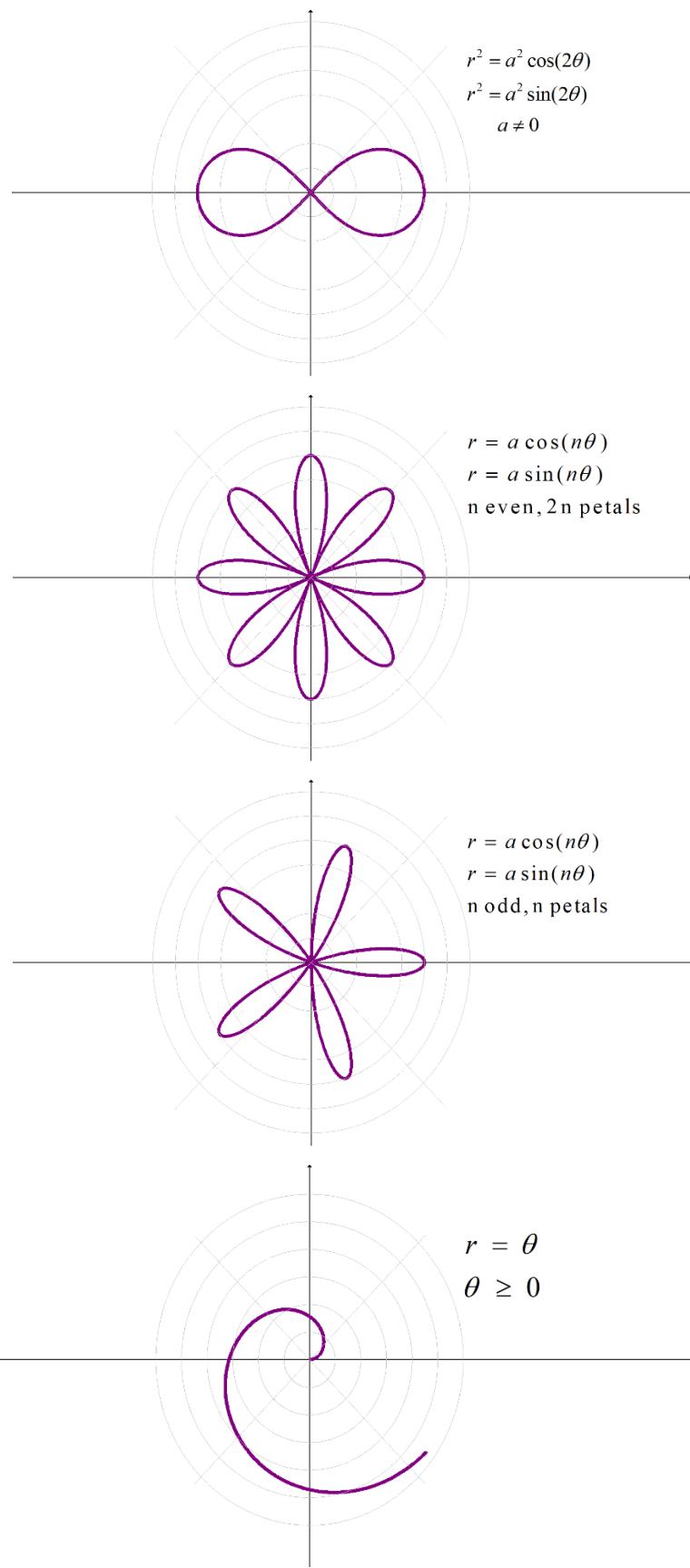


$$r(\theta) = a - b \sin \theta$$

$$a \geq 2b$$



גרפים נפוצים נוספים



משוואות דיפרנציאליות

פרק 7 - פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

תוכן העניינים

1. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית	77
2. פתרון מדר בעזרת טורים - נקודה רגולרית-סינגולרית	79
3. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות	81

פתרונות מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות לטורי מקלורן של פונקציות חשובות.

שאלות

פתרונות את המשוואות בשאלות 1-7 על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $0=x$.
במיוחד, רשמו נוסחה רקורסיבית (נוסחת נסיגה) עבור האיבר הכללי,
וציינו את ארבעת האיברים הראשונים בפיתוח של הטור.

7.1 **תזכורת:** טור חזקות סביב $0=x$ שקול לטור טילור סביב $0=x$ וSKUOL לטור מקלורן.

$$y(0)=3, \quad y'(0)=12; \quad y''-2x^2 y' + 4xy = x^2 + 2x + 2 \quad (1)$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=2; \quad y''-xy=0 \quad (2)$$

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad (3)$$

$$(x^2+4)y''+xy=x+2 \quad (4)$$

$$y''+(x-1)y'+(2x-3)y=0 \quad (5)$$

$$y(0)=a_0=1, \quad y'(0)=a_1=2; \quad y''+ty=e^{t+1} \quad (6)$$

$$y''+(t-1)y'+(2t-3)y=0 \quad (7)$$

8 פתרו את המשוואה $, y(1)=1, y'(1)=2 ; y''(x)+(x-1)y(x)=e^x$ על ידי פיתוח הפתרון לטור חזקות סביב $x=1$.

9 פתרו את המשוואה $. y(-1)=2, y'(-1)=-2 ; y''+xy'+(2x-1)y=0$ רמז: תנאי ההתחלה מרמז על כך שצדאי לפתח את הפתרון לטור חזקות סביב $x=-1$.

תשובות סופיות

$$a_n = \frac{2n-10}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 5) \quad , \quad y = 3 + 12x + x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots + a_n x^n \dots \quad (1)$$

$$\cdot a_n = \frac{1}{(n-1)n} a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad , \quad y = 1 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

$$a_n = \frac{n-3}{n-1} a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad , \quad y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + 0x^3 - \frac{1}{3}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1-a_0}{24} \right) x^3 + \left(\frac{-1}{48}a_1 - \frac{1}{96} \right) x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4)$$

$$a_n = \frac{-1}{4(n-1)n} a_{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{4(n-1)n} a_{n-2} , \quad (n \geq 4)$$

$$y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0 \right) x^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0 \right) x^3 + \frac{1}{6}a_0 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (5)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e-1}{6}t^3 + \frac{e-4}{24}t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (6)$$

$$a_n = \frac{e}{n(n-1)(n-2)!} - \frac{a_{n-3}}{n(n-1)} \quad (n \geq 3)$$

$$y = a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0 \right) t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0 \right) t^3 + \frac{1}{6}a_0 t^4 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 1 + 2(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e-1}{6}(x-1)^3 + \frac{e-4}{24}(x-1)^4 + \dots + a_n (x-1)^n + \dots \quad (8)$$

$$a_n = \frac{e - a_{n-3}(n-2)!}{n!} \quad (n \geq 3)$$

$$y = 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \dots \quad (9)$$

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{n-5}{n(n-1)} a_{n-2} - \frac{2}{n(n-1)} a_{n-3} \quad (n \geq 3)$$

פתרונות מדר בעזרת טורים – נקודה רגולרית-סינגולרית

שאלות

עבור כל אחת מהמשוואות הבאות הראו שהנקודת היא נקודה סינגולרית רגולרית, ופתרו את המשווהה על ידי פיתוח המשווהה לטור חזקות בסביבות הנקודה.

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0 \quad (1)$$

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0 \quad (2)$$

$$2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0 \quad (3)$$

$$3x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (4)$$

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \quad (5)$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \quad (6)$$

$$x^2y'' + x(x+2)y' - 2y = 0 \quad (7)$$

$$x^2y'' + x(x-2)y' + 2y = 0 \quad (8)$$

הערות

בשאלות 2-5, הפתרונות של המשווה האינדייציאלית שונים והפרשם אינם מספר שלם. בשאלות 6 ו-7 הפתרונות שווים, ובשאלות 8 ו-9 הפתרונות שונים והפרשם מספר שלם.

תשובות סופיות

$$y = k_1 x^{1/3} \left(1 - \frac{1}{14} x^2 + \frac{1}{728} x^4 + \dots \right) + k_2 \left(1 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{440} x^4 + \dots \right) \quad (1)$$

$$y = k_1 x^{1/2} \left(1 - \frac{7}{18} x^1 + \frac{147}{792} x^2 + \dots \right) + k_2 x^{-3} \left(1 - \frac{21}{5} x^1 + \frac{49}{5} x^2 - \frac{343}{15} x^3 \right) \quad (2)$$

$$y = k_1 x^{-1} \left(1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right) + k_2 x^{2.5} \left(1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right) \quad (3)$$

$$y = k_1 x + k_2 x^{1/3} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y &= k_1 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \\ &+ k_2 \left[\ln x \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{4^2 \cdot 2^2} x^4 + \dots \right) + \left(\frac{2}{2^3} x^2 + \frac{-12}{4^3 \cdot 2^3} x^4 + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x \quad (6)$$

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 - e^{-x} \right) + \frac{k_2}{x^2} e^{-x} \quad (7)$$

$$y = -a_0 x^2 \ln x \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + a_0 x \left(1 - x^2 - \frac{3}{4} x^3 + \dots \right) \quad (8)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 8 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים	82
2. מבחן ההתבדרות של טורים	85
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים.....	86
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים.....	88
5. התכנסות בהחלט והכנסות בתנאי	90
6. תרגילי תיאוריה.....	91

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-6.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-11.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (11)$$

טור הרמוני מוכלל

: 12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad \text{כ.}$$

תכונות אלגבריות של טוריים

13) בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad \text{א.}$$

14) חבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, אם ידוע כי

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא ...0.123123123...+0.141414...

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$. **2)** מתכנס ל-. $\frac{1}{3}$. **3)** מתבדר.

4) מתכנס ל-. $\frac{64}{7}$. **5)** מתכנס ל-. $\frac{11}{12}$. **6)** מתכנס ל-8.

7) מתכנס ל-. $\frac{1}{2}$. **8)** מתכנס ל-. $\frac{1}{12}$. **9)** מתבדר.

$$\frac{1}{12} \quad \mathbf{(11)} \qquad S = \frac{1}{\ln 2} \quad \mathbf{(10)}$$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר.

ד. מתבדר. ה. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \quad \mathbf{(14)}$$

$$\frac{323}{1221} \quad \mathbf{(15)}$$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad \text{ה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad \text{ד.}$$

תשובות סופיות

1) א-ו : מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 1-5 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרბדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} (p > 1) \quad (4)$$

6) ענו על הטעיפים הבאים :

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 e^{-n^3}$

מבחן ההשוואה ו מבחן ההשוואה הגובי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 7-15 (קבעו אם הטור מתכנס או מתרბדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{\sqrt{n^{10} + n + 1}} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 1} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4 + n + 1}} \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) \quad (13)$$

מבחן המנה, מבחן השורש ובחן ראנָבָה

בדקו את התכונות הטוריים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \quad (26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \quad (25)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------|-------------|---------------|
| (3) מתכנס. | (2) מתבדר. | (1) מתבדר. |
| (4) מתכנס. | (5) מתבדר. | (6) א. מתכנס. |
| | ב. 0 | (7) מתכנס. |
| (9) מתכנס. | (8) מתבדר. | (10) מתבדר. |
| (12) מתכנס. | (11) מתכנס. | (13) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (14) מתכנס. | (16) מתבדר. |
| (18) מתכנס. | (17) מתכנס. | (19) מתכנס. |
| (21) מתכנס. | (20) מתכנס. | (22) מתכנס. |
| (24) מתכנס. | (23) מתכנס. | (25) מתבדר. |
| | (26) מתבדר. | |

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן ליבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות 3-1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

מבחן דיריכלה

בשאלות 4 ו-5, קבעו אם הטור מתכנס או מתרוגס :

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{2}{16} + \dots \quad (4)$$

$$\sum \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n+1} \quad (5)$$

6) הוכיחו שהטורים $\sum \sin n\theta$, $\sum \cos n\theta$, כאשר $\theta \neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים :

$$.\left(\theta \neq 2\pi k\right) \sum \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \sum \frac{\cos n\theta}{n+1}, \quad \sum \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}}$$

8) בדקו התכנסות הטור $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושוואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n \sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (3-n)(\text{mod } 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-n)(\text{mod } 7)}{\sqrt{n+1}}$

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר :

$$\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}} \quad (12)$$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\sqrt{n+4}} \quad (11)$$

$$\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2} \quad (14)$$

$$\sum \frac{(-1)^n \ln(1+n^{-1})}{n} \quad (13)$$

תשובות סופיות

- | | | |
|-------------|-------------|----------------|
| (3) מתכנס. | (2) מתכנס. | (1) מתכנס. |
| (6) הוכחה. | (5) מתכנס. | (4) מתכנס. |
| (9) הוכחה. | (8) מותבדר. | (7) הוכחה. |
| (11) מתכנס. | ב. מתכנס. | (10) א. הוכחה. |
| (14) מתכנס. | (13) מתכנס. | (12) מתכנס. |

התכנסות בהחלה והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלה, מתכנס בתנאי או מתבדר :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n} \right)^n \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

תשובות סופיות

- | | |
|------------------|------------------|
| (1) מתבדר. | (2) מתכנס בהחלה. |
| (4) מתכנס בתנאי. | (5) מתכנס בהחלה. |
| (7) מתכנס בתנאי. | (8) מתכנס בתנאי. |
| (3) מתכנס בתנאי. | |
| (6) מתכנס בתנאי. | |
| (9) מתכנס בתנאי. | |

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $(\sum a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתכנס, אז $(\sum a_n + b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס.

3) הוכחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(a_n + (-1)^n \right)$ מתבדר.

4) הוכחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
הוכחו כי $\sum \left(1 - \frac{\sin(a_n)}{a_n} \right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכחו כי $\sum \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.
הוכחו ש- $\sum |a_n|^2$ מתבדר אם $\sum |a_n|$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין השעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

8) הוא טור אי-שלילי ומתכנס. $\sum a_n$

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n + 4^n}{a_n + 10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n \geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ לכל n , אז $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל n , אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכל n , אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתקנס $\sum a_n$.
הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו :

א. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$), אז $\sum a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n .

א. נתון כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_1 = \frac{21}{20}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, כאשר $(n \geq 1)$

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

$$\text{21) הטור } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מוגדר כך: } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס.

$$\text{22) נתון טור חיובי ומתכנס } \sum a_n, \text{ ונתון כי לכל } n \text{ מתקיים } a_{n+1} \leq a_n. \text{ הוכיחו כי } \sum n(a_n - a_{n+1}) \text{ מתכנס.}$$

$$\text{23) נתון } \forall n \geq 1: 0 < a_n < 1, 4a_n(1-a_{n+1}) > 1. \text{ האם } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - 1) \text{ מתכנס?}$$

$$\text{24) נניח כי } (a_n) \text{ סדרה המקיים } a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1} < 0 \text{ לכל } n \text{ טבעי.} \\ \text{הוכיחו כי } \sum a_n \text{ מתבדר.}$$

$$\text{25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.} \\ \text{הוכיחו כי } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ מתבדר.}$$

- $$\text{26) נתון טור חיובי } \sum a_n. \\ \text{הוכיחו או הפריכו:}$$
- א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.
 ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא טורי מקולון עם שארית לגרנץ'.

28) פונקציה f מוגדרת לכל x , גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0) = 0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
 $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
 $p(0) = 0 \Leftrightarrow \sum P(a_n)$ מתכנס.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טוריים חיוביים.
נתון כי :

(1) הטור $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנס.(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר : GooL.co.il

משוואות דיפרנציאליות

פרק 9 - טורי טיילור - מקלרון

תוכן העניינים

96	1. טור טיילור וטור מקלרון
98	2. טור טיילור סביב $X=0$
99	3. חישוב סכום של טור
100	4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלרון
101	5. חישובים מקרובים עם השארית של לייבנץ
103	6. חישוב מקרוב של אינטגרל מסוים
104	7. חישובים מקרובים עם השארית של לגראנז'
110	8. נוסחאות – טורי מקלרון של פונקציות חשובות

טור טיילור וטור מקלרון

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביבה $x = 0$ (טור מקלרון) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2)$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6)$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad (5)$$

$$f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9)$$

$$f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8)$$

$$f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (20)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan \left(\frac{x}{3} \right) \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להזכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.

לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להזכיר את הנושא גזירה וaintגרציה של טורי מקלרון.

אפשר להיעזר בפתרונות הידועים לטור מקלרון המופיעים בספר.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלרון של הפונקציות (נדרש ידוע ככפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27)$$

$$f(x) = \tan x \quad (26)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9) \quad (-1 < x < 1)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < 5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(|x| < 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(-1 < x \leq 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \quad \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22)$$

$$(|x| < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26)$$

$$1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{25}{24} x^4 - \frac{331}{720} x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + \dots \quad (27)$$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x_0 = x$ של הפונקציות הבאות:

$$(x_0 = 1) \quad f(x) = \ln x \quad (1)$$

$$(x_0 = 2) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2} \right) \quad f(x) = \sin x \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1) \\ (0 < x \leq 2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2) \\ (0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3) \\ (-\infty < x < \infty)$$

чисוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

תשובות סופיות

$\pi/4 \quad (5)$

$2e \quad (4)$

$\sqrt{e} \quad (3)$

$e^{-2} \quad (2)$

$e \quad (1)$

$\ln \frac{3}{2} \quad (9)$

$\ln 2 \quad (8)$

$\cos 1 \quad (7)$

$\sin 1 \quad (6)$

чисוב גבולות בעזרת טורי מקלורו

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את ערך הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(4) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{x^2} - 1}{x^n} = k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k .

(5) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{120} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$k = 1, n = 3 \quad (4)$$

$$1 \quad (5)$$

чисובים מקורבים עם השארית של ליבנץ

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3)$$

$$\sin 3^\circ \quad (2)$$

$$\frac{1}{e} \quad (1)$$

בשאלות 4-6 חשבו בעזרת n איברים ראשוניים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלרון, והעריכו את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (6)$$

$$(n=1) \cos 4^\circ \quad (5)$$

$$(n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4)$$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $x \approx \ln(1+x)$ עבור $|x| < 0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$?

10) עברו אילו ערכי x , כך $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עברו אילו ערכי x , כך $\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

$$\frac{53}{144} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{60} \quad (2)$$

$$\frac{47}{192} \quad (3)$$

$$\frac{1}{48}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{160}, \text{ בשגיאת הקטנה מ- } \frac{77}{192} \quad (6)$$

$$\frac{(\pi/6)^5}{5!} \quad (7)$$

$$\frac{(0.01)^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{(0.2)^6}{6!} \quad (9)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (10)$$

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (11)$$

чисוב מוקרוב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε :

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \quad \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2)$$

$$(\varepsilon = 0.0001) \quad \int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\frac{449}{2250} \quad (1)$$

$$\frac{39}{400} \quad (2)$$

$$\frac{143}{576} \quad (3)$$

чисובים מוקרבים עם השארית של לגראנץ'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 < \sqrt{x+4} < 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$$

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב ? $|x| < 0.1$

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $0 < x$ מתקיים :

$$4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 < \sqrt[3]{64+x} < 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב 0, $x_0 = 0$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכחו שלכל $1 < x < 0$ מתקיים :

$$x < \tan x < x + 4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב 16, $x_0 = 16$, כולל שארית לגראנץ'.

חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3} .

6) חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכי :

א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = 0$.

ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x = \frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$? נמקו.

$$7) \text{ נתונה } f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $1 \leq x \leq 0$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

$$\text{ב. הוכחו שלכל } 0 \geq x \text{ מתקיים } x \leq \sqrt{1+x}.$$

$$8) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3 עבור $0.9 \leq x \leq 0.1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.
- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$0.1 \leq x \leq 0.9, \frac{1}{1+x} \approx 1-x+x^2-x^3$$

$$\text{ג. הוכחו כי עבור } x < -1 \text{ מתקיים } \frac{1}{1+x} \geq 1-x+x^2-x^3.$$

$$9) \text{ נתונה } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

- א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x| \leq 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

- ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת

$$|x| \leq 0.5, \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$$

$$\text{ג. פתרו את אי השוויון } \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} < 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2, \text{ עבור } -1 < x.$$

10) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את נוסחת מקלוון עבור $f(x) = e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

$$\text{ב. חשבו את } \sqrt[e]{e} \text{ ברמת דיוק של } 10^{-4}.$$

- ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$0 \leq x \leq 1, e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

- ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1, 1)$, שבעורו $|e^x - p(x)| < 10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x) = \ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של גראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4} .

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת :

$$\ln(1+x) \cong x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שבעורו $|\ln(1+x) - p(x)| < 10^{-2}$

ה. הוכיחו כי לכל $0 < x$ מתקיים אי השוויון $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < \ln(1+x) < x$

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f(0) = f(1)$ ו- $|f''(x)| \leq M$ לכל $0 < x < 1$.

הוכיחו כי $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

13) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f(-1) = f(1) = 0$.

כמו כן, נתון כי קיימים M , כך ש- $|f''(x)| \leq M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1 \leq x \leq 1$ מתקיים $|f(x)| \leq \frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0, \infty)$, ונניח כי M לכל $x < 0$ $|f'(x)| \leq M$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

15) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיים $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$.

ונניח כי $x_0 \in [a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x \in [a,b]$ מתקיים $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos x - \cos y \geq (x - y) \sin(\frac{x+y}{2})$ לכל $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

הוכיחו כי $(M_1)^2 \leq 2M_0M_2$.

17) נתנו ש- f גזירה פעמיה ב- $(0, \infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0, \infty)$.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

תשובות סופיות

1) א. נוסחה : $\sqrt[3]{64+x} = 4 + \frac{1}{48}x - \frac{1}{9216}x^2 + \frac{5}{81\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$

חישוב : $\cdot \frac{5}{663552}, \sqrt[3]{66} = 4 + \frac{1}{24} - \frac{1}{2304} = \frac{9311}{2304}$

ב. שאלת הוכחה. $\frac{1}{480000}.$ ג.

2) א. נוסחה : $\tan 0.1 = \frac{1}{10}, \tan x = x + \frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, שגיאה בקירוב :

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה : $\sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 - \frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$

חישוב : $\cdot \frac{1}{512} : \sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{143}{64}$

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה : $\sqrt[4]{x} = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{128\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$

חישוב : $\cdot \frac{1}{3130}, \sqrt[4]{15} = 2 - \frac{1}{32} - \frac{3}{4096} = \frac{8061}{4096}$

5) $\sqrt[3]{29} = 3 \frac{158}{2187}$

$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4})^3.$ ב. $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - \frac{\frac{\pi^3}{5^3}}{3!} + \frac{\frac{\pi^5}{5^5}}{5!} - \frac{\frac{\pi^7}{5^7}}{7!}.$ א. **6)**

ב. שגיאה הקטנה מ- 0.25. **7)** א. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$

א. $\cdot \frac{6561}{10000} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$ בשגיאה הקטנה מ-

ב. שגיאה הקטנה מ-. **8)** ג. שאלת הוכחה. $\frac{6561}{10000}$

א. $\cdot \frac{7}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ-

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $\sqrt{e} = 1.6487$ ב. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$

ג. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}$ ד. $\frac{3}{(n+1)!}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}} x^{n+1} . \quad \text{א. (11)}$$

$$\ln(1.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} - \frac{0.5^6}{6} + \frac{0.5^7}{7} - \frac{0.5^8}{8} + \frac{0.5^9}{9} . \quad \text{ב.}$$

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{101}}{101} - \frac{x^{102}}{102} . \quad \text{ג. שאלת הוכחה.}$$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

הערה לגבי קירובים

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק** ל- n ספרות אחרי הנקודה, אז علينا לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} .
 למשל, דיקוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעתו, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$.
 בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקרים מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורו של פונקציות חשובות

טור מקלורו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

תחום התכנסות

$$-\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

$$-1 < x < 1$$

$$\begin{aligned}
 (1+x)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n \\
 &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$$

$$-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$$

$$-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$$

$$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 10 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטוריות חזקות

תוכן העניינים

111	1. סדרות פונקציות
114	2. טורי פונקציות
116	3. טורי חזקות
118	4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבסעיפים 1-11:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

$$\cdot (0,1) \text{ ב-} f_n(x) = x^n \quad (2) \quad \cdot [0,0.5] \text{ ב-} f_n(x) = x^n \quad (1)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad (4) \quad \cdot (0,\infty) \text{ ב-} f_n(x) = \arctan(nx) \quad (3)$$

$$\cdot [0.5,4] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad (6) \quad \cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (5)$$

$$\cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad (8) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \quad (7)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = n(1-x)x^n \quad (10) \quad \cdot \mathbb{R} \text{ ב-} f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+x^2+n^2} \quad (9)$$

$$\cdot [0,1] \text{ ב-} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ n(x-1)+1 & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{12) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0, 4]$?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0, 4]$?
 ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?
 ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{13) נתונה סדרת הפונקציות } f_n(x) = nx e^{-n^2 x^2}$$

- א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0, \infty)$?
 ב. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע $[0, \infty)$?
 ג. האם הסדרה מתכנסת במיש בקטע $[1, \infty)$?

$$\text{14) נתונה } f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר המשמי?
 ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר המשמי?

$$\text{15) נגדיר את סדרת הפונקציות } f_n(x) = \left[1 - \chi_n(x) \right] \left(x + \frac{1}{n} \right)^{-1} + n^\alpha \cdot \chi_n(x)$$

$$\cdot \chi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left(n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ כאשר}$$

- א. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $(f_n(x))$
 מתכנסת נקודתית ב- $[1, \infty)$?
 אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?
 ב. מהם ערכי הפרמטר α , עבורם סדרת הפונקציות $(f_n(x))$
 מתכנסת במידה שווה ב- $(\infty, 1]$?

תשובות סופיות

- 1)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 2)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 3)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \frac{\pi}{2}$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 4)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$.
ב. לא במידה שווה.
- 5)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 6)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0.5 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \\ 1 & 1 < x \leq 4 \end{cases}$.
ב. לא במידה שווה.
- 7)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 8)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2}$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 9)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 10)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 11)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$.
ב. מתכנסת במידה שווה.
- 12)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ד. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 13)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. לא במידה שווה. ג. כן.
- 14)** א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x) = 0$.
ב. אינה מתכנסת במידה שווה.
- 15)** א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $(1, \infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha < 0$.

טורר פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot [\ln(nx)]^4} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5)$$

בדקו התחום הטעון שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (7)$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4 \right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (10)$$

$$(-a \leq x \leq a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (11)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (12)$$

תשובות סופיות

$x > 0$ **(1)**

$x \neq 5$ **(2)**

$x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$ **(3)**

$0 < x \neq \frac{1}{n}$ **(4)**

$x > 0$ **(5)**

$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ **(6)**

(7) מתכנס במידה שווה.**(8)** מתכנס במידה שווה.**(9)** מתכנס במידה שווה.**(10)** מתכנס במידה שווה.**(11)** מתכנס במידה שווה.**(12)** מתכנס במידה שווה.

טוריות חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות 1-12:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (15)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (14)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (19)$$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות נמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתורון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad \text{(2)}$$

$$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad \text{(1)}$$

$$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad \text{(4)}$$

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad \text{(3)}$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad \text{(6)}$$

$$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad \text{(5)}$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad \text{(8)}$$

$$x = 1, R = 0 \quad \text{(7)}$$

$$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad \text{(10)}$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad \text{(9)}$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad \text{(12)}$$

$$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad \text{(11)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad \text{(14)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{(13)}$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad \text{(16)}$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad \text{(15)}$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad \text{(18)}$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad \text{(17)}$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad \text{(20)}$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad \text{(19)}$$

גזרה וaintגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות 7-1 :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad (3)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = \ln(5-x) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (7)$$

$$\text{8) חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

$$\text{9) חשבו את סכום הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^{n-1}$$

10) ענו על הטעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (2n-1)}$

11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

תשובות סופיות

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (2)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (1)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (6)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (5)$$

$$\frac{20}{27} \quad (8)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \ln 3 \cdot \text{ב.} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \quad |x| < 1 \text{ . נ } (10)$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} \quad |x| < 1 \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} \right) \cdot \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{1}{2} \arctan x \quad |x| < 1 \text{ . נ } (11)$$

$$\arctan x \quad |x| \leq 1 \quad (13)$$

$$\frac{1}{10} \left(\frac{1}{4} \ln \frac{11}{9} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \right) \quad (12)$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 11 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

1. בעיות גדילה ודעיכה.....	120
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית	122
3. עקומות אורתוגונליות.....	124
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום	125
5. בעיות שונות.....	126

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

- 1)** קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
 - כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
 - באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- *הניחס שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שככל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- 2)** האוכלוסייה בעיר מסויימת גדלה מעריכית.
בשנה מסויימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- מצאו את אחוזו הגידול השנתי.
 - מצאו בעבר כמה שנים (החל מהשנה המסויימת),
היו בעיר 550 אלף תושבים.
- 3)** אדם הפקד סכום כסף בבנק בריבית דרייבית של 4%.
עבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- כמה כסף הפקד האדם?
 - עבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- 4)** מספר חיים הבר בעין גדי גדול בצורה מעריכית.
בספרה הראשונית היו 1,000 חיים.
בספירה השנייה שנעשתה, בעבר 20 חודשים, היו 1,400 חיים בר.
מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספרה הראשונה,
היו בשמורה 2,000 חיים בר.
- 5)** ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
ידוע כי קצב ההתרופקות הרגעי של היסוד,
פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- כמה גרים של יסוד זה ישרוו אחרי 1,000 שנים,
מכמות התחלתית של 100 גרים?
 - עבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרים,
מכמות התחלתית של 100 גרים?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, ובכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, ובכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה שווה?
 - בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכך?

תשובות סופיות

- | | | | |
|----------------|-----------------|------------------|-----|
| ג. בשנת 2,106. | ב. 3.54. | א. 7.28 מיליארד. | (1) |
| | ב. 15.92 שנים. | א. 2%. | (2) |
| | ב. 13.41 שנים. | א. 4093.65 ט. | (3) |
| | ב. 19,188 שנים. | א. 40.77 חודשים. | (4) |
| | ב. 14.6 שבועות. | א. 88.69 גרם. | (5) |
| | א. 3.04 שבועות. | א. 3 שבועות. | (6) |

בעיות גיאומטריות

שאלות

1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום,

$$\text{שווה ל } -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

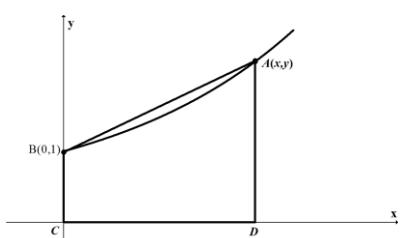
3) מצאו את משוואת העקום, שהשיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

4) תרגמו את התייאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום בربיע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$.

נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה (x, y) מעליו, ובין שיפוע הישיר המחבר את A עם ראשית הצירים, שווה לשיעור $\frac{y}{x}$ של הנקודה A .

5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3,4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו לציר ה- x , נחצה על ידי ציר ה- y .
מצאו את משוואת עקום זה.



7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?

8) נתון עקום, בربיע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$, וSHIPOU המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$.
מצאו את משוואת העקום.

9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,

$$\cdot \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

ושבכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא

10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל

על ידי ציר $h-y$, המשיק לעקום בנקודה כלשהו עלינו (x, y) וחותם OM,

מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN

(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הניל חותך את ציר $h-y$).

צירזו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x^2/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c . \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$
בנקודה $(1,2)$ שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של 45°

$$\text{עם משפחת המעגלים } x^2 + y^2 = c$$

תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

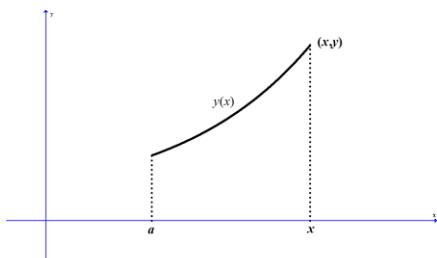
$$y = ax^2 , \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

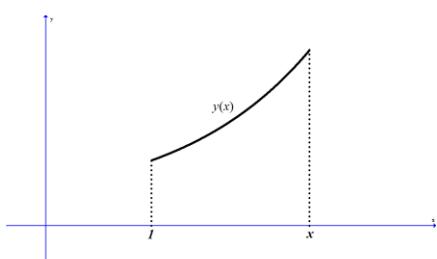
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

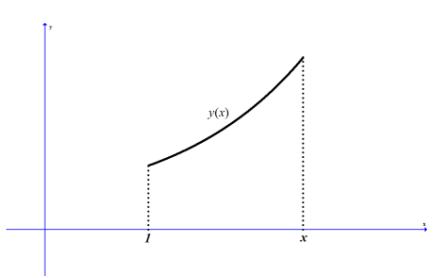
שאלות



- (1) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x=a$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(x, y(x))$ ו- $(a, y(a))$. מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x=1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1)=2$. האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



- (3) שטח S מוגבל על ידי עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x=1$, ו- x משתנה (ראו ציור). ידוע כי $y(1)=2$. האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של S שווה ל- $2 - y(x)$?

תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

בעיות שונות

שאלות

- 1)** בזמן $t = 0$, יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוזו של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמייסה המעורבת מנוקזות החוצה מן המיכל באותו קצב.
- חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
 - תוקן כמה זמן תהייה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- 2)** סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$, כשהסירה מנוטה, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחזור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$, כאשר v נמדדת במטר/שנייה.
- מצאו את מהירות הסירה מעבר חצי דקה.
 - מצאו מעבר כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
 - מצאו את המהירות הסופית.
- 3)** חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גופם מתקרר פרופורצionaliy להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר חצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- מהי טמפרטורת החומר לאחר לשעה?
 - כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- 4)** נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחום הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורצionaliy לשורש מגובהם. נסמן ב- (t) h את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
- רשמו מד"ר עבור גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.
 - מהו תנאי ההתחלתה של הבעיה?
 - ידעו כי $\pi r^2 h = k$.
 - פתרו את המד"ר.
 - תוקן כמה זמן תישאר בגליל ממחצית מכמות המים ההתחלתית?

- 5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ , נמס, כך שהקცב שבו רדיוסו קטן – פרופורציוני לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס"מ .
א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מינוחו ההתחלתי?
- 6) מבлон מלא אויר, שרדיוסו R , מתחילה לצאת אויר.
קצב יציאת האויר הוא $(t) V$, כאשר V הוא נפח הבלון בזמן t .
הוכיחו כי כעבור $2 \ln$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמיינית מינוחו ההתחלתי.
הערה : בשאלות 5 ו-6 נדרש ידוע בהפרצת משתנים.

תשובות סופיות

- 1) א. 26.75 ק"ג .
ב. 0.942 דקotas .
ג. 10 מטר/שניה .
- 2) א. 4.09 מטר/שניה .
ב. 72 שניות .
- 3) א. $43\frac{1}{3}^\circ$.
ב. 1.13 שעות .
- 4) א. $h(0) = 4$; $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$
ב. 4.5 שעות .
- 5) א. $R(t) = \frac{12}{2t+3}$
- 6) שאלת הוכחה.

משוואות דיפרנציאליות

פרק 12 - פרק חוזר - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

128	1. אינטגרלים מיידיים
131	2. מציאת פונקציה קדומה

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתרונות על ידי הכלל : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int x^4 dx \quad (2)$$

$$\int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20 :

(פתרונות על ידי הכלל : $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14)$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתרונות על ידי הכלל : $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 29-27 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \right) \text{ (פתרונות על ידי הכלל : 29-27)}$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$(30) \text{ חשבו את האינטגרל : } \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c \right) \text{ (פתרונות על ידי הכלל : 30)}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 33-31 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x} + c \quad (3)$$

$$\frac{x^5}{5} + c \quad (2)$$

$$4x + c \quad (1)$$

$$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8)$$

$$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11)$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$

$$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15)$$

$$\frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14)$$

$$\frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$

$$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17)$$

$$\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$

$$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$

$$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$

$$x + \ln|x+2| + c \quad (25)$$

$$\frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24)$$

$$x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$

$$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28)$$

$$\frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27)$$

$$4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$

$$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{\left(200\right)^x}{\ln(200)} + c \quad (30)$$

$$8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{\frac{-4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$

$$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33)$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה : $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה : $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה : $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שייפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = 6x + 6$.

שייפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 ,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה : $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

- 8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$,
 ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$
- מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
 - חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
 - תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.
 חשבו את הנגזרת $'(G(x) - f(x))$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12\frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

g. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$. b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

h. 0 d. נקודת פיתול אחת $(0,0)$.

משוואות דיפרנציאליות

פרק 13 - פרק חוזר - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים

133

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת הצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24)$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c \quad (3)$$

$$\ln|\sin x| + c \quad (2)$$

$$\ln|x^2 + 1| + c \quad (1)$$

$$e^x \ln|e^x + 1| + c \quad (6)$$

$$\ln|\ln|x|| + c \quad (5)$$

$$-\ln|\cos x| + c \quad (4)$$

$$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c \quad (9)$$

$$e^{\tan x} + c \quad (8)$$

$$e^{x^2} + c \quad (7)$$

$$\sin(\ln x) + c \quad (12)$$

$$\sin(\sin x) + c \quad (11)$$

$$\sin(2x^2 + 1) + c \quad (10)$$

$$-2 \cos(\sqrt{x}) + c \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{40} \sin(10x^4 + 1) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} (\tan x)^2 + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + c \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c \quad (16)$$

$$\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c \quad (21)$$

$$\sqrt{2 \sin x} + c \quad (20)$$

$$2\sqrt{x^2 + 1} + c \quad (19)$$

$$\frac{2}{3} (\arctan x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (24)$$

$$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \quad (23)$$

$$\frac{2}{9} (x^3 + 4)^{\frac{3}{2}} + c \quad (22)$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 14 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת 135

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלוקת

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3)$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2)$$

$$\int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11)$$

$$\int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int x \arctan x dx \quad (14)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17)$$

$$\int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20)$$

$$\int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23)$$

$$\int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

$$(24) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int x^n e^x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(25) \text{ חשבו את } \int x^4 e^x dx.$$

$$(26) \text{ מצאו נוסחת נסיגה עבור } \int \cos^n x dx \text{ באשר } n \text{ טבעי.}$$

$$(27) \text{ חשבו את } \int \cos^4 x dx.$$

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ כאשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ כאשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$

32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$.

תשובות סופיות

(1) $xe^x - e^x + c$

(2) $\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c$

(3) $x \cos x + \sin x + c$

(4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

(5) $-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c$

(6) $-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} xe^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c$

(7) $x \ln x - x + c$

(8) $-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c$

(9) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c$

(10) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(11) $\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c$

(12) $x \tan x + \ln |\cos x| + c$

(13) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$

(14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c$

(15) $\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c$

(16) $x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c$

(17) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c$

(18) $-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$

(19) $\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c$

(20) $\frac{x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4}(\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5(\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n}(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4}(-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5(x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 15 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

139

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5} - \frac{4}{3} \left(\sqrt{x^3+4}\right)^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2 \right) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x \left(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6 \right) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln|\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln|1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6 \left(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x} \right) + c \quad (23)$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} \right)^4}{4} + c \quad (24)$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 16 - אינטגרלים של פונקציות רצינליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רצינלית.....	142
2. חילוק פולינומיים ואינטגרלים של פונקציה רצינלית.....	144
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רצינלית.....	145

אינטגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan \left(\frac{x+0.5}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

חילוק פולינומיים וaintגרלים של פונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שימושיים הצבה ופונקציה רצינלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln \left| 1 - \sqrt[3]{x^2} \right| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[6]{x} \right)^3}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[6]{x} \right)}{2} + 3\left(1 + \sqrt[6]{x} \right) - \ln \left| 1 + \sqrt[6]{x} \right| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right)^2}{3} - \frac{3\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right)^2}{2} + 3\left(1 + \sqrt[4]{x-1} \right) - \ln \left| 1 + \sqrt[4]{x-1} \right| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln \left| \sqrt[3]{x} + 1 \right| - \frac{1}{2} \ln \left(\left(\sqrt[3]{x} - 0.5 \right)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln \left| 1 + e^x \right| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

נוסחאות

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 17 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא	(ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות	147
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות.....	149
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית	150
5. הצבות טריגונומטריות שມטרתן להיפטר משורשים.....	151
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות	154

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי :

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x + c$	$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax+b) + c$
$\int \cot x dx = \ln \sin x + c$	$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad (2)$$

$$\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx \quad (1)$$

$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 10x} \quad (3)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8)$$

$$\int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \quad (9)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12)$$

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t)(-dt)$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

(2) $\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx$

(1) $\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx$

(4) $\int \sin^3 2x dx$

(3) $\int \cos^3 x dx$

(6) $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

(5) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

(8) $\int \tan^5 x dx$

(7) $\int \cos^5 x dx$

(10) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(9) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(12) $\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx$

(11) $\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$

תשובות סופיות

(2) $\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c$

(1) $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c$

(4) $-\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c$

(3) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

(6) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c$

(5) $\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c$

(8) $\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c$

(7) $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c$

(10) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c$

(9) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$

(12) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c$

(11) $-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c$

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

זכור כי:

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}} \arctan \left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \right) \right) + c \quad (3)$$

הצבות טריגונומטריות שמשתarten להיפטר משורשים

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt) \\ \int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right) \\ \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right) \end{aligned}}$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה : כדי לפתרו את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רצינליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \left(\arcsin\frac{x}{2} \right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin\frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan\frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} + c \quad (10)$$

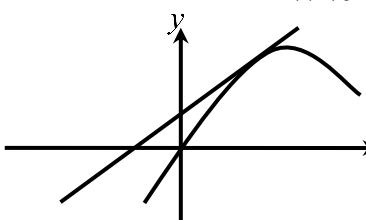
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

чисוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתוחם שבין ראשית הצירים لنקודת המקסימום הראשונה
מייננה העבירו לפונקציה משיק ששיופעו 1.

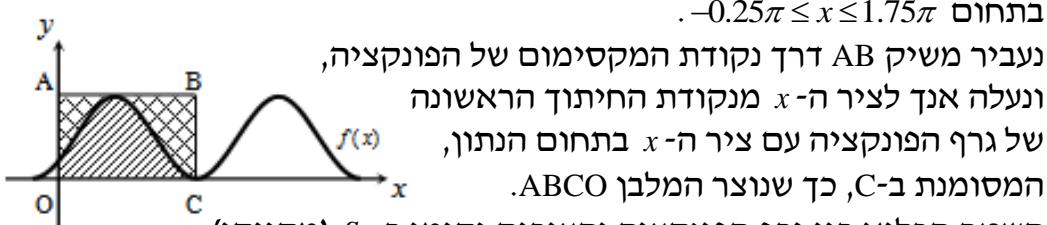


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק וציר ה- x , בריבוע הראשון והשני.

2) באIOR שלහן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$

בתוחום $\pi \leq x \leq 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה,
ונעליה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה
של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנตอน,

המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

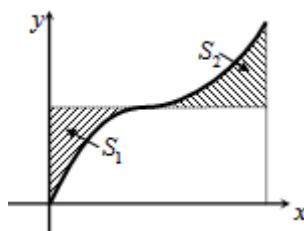
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

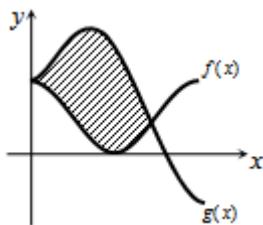
ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באIOR שלහן נתונה הפונקציה $y = \sin x + x$, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנตอน? הוכיחו זאת.

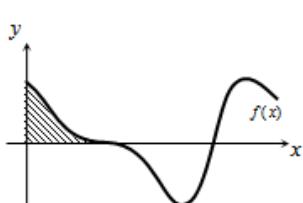
ב. נוריד אנך מגראף הפונקציה לציר ה- x בנקודת שבה $x = 2\pi$,
ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בشرطוט, S_1 ו- S_2 , שווים.





4) באIOR שלහלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x$, בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
- חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
- השתמשו בזיהות $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



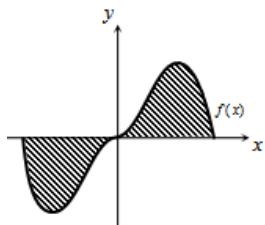
5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$

- מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיים $f'(x) = 0$, בתחום $0 < x < 2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$, אשר אינה קייזון, נמצאת על ציר ה- x .

- מצאו את הפונקציה $f(x)$.

6) באIOR שלහלן מתואר גраф הפונקציה בתחום הנתון. חשבו את השטח הכלוא בין גраф הפונקציה והצירים.



6) נתונה הפונקציה $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

- הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא

באיור שלහלן נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \sin x$, בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- הראו כי גраф הפונקציה עובר בראשית הצירים.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = a \cos x + b \sin x$, כאשר a, b פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות

ב. π ייח"ש. א. $y = x + 2$ (1)

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538 \quad \text{ב. } y = 1 \quad \text{א. } (1)$$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.

$$S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934 \quad \text{ב. } S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299 \quad \text{א. } \left(0, 1\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) (3)$$

$$\text{ג. } f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \quad \text{א. } \frac{1}{2} \text{ ייח"ש.} (4)$$

. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ ב. שאלת הוכחה. א. שאלת הוכחה. (5)

$$b = -2, a = 2 \quad (6)$$

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(a + \beta) + \cos(a - \beta)) \end{cases}$$

משוואות דיפרנציאליות

פרק 18 - נושאים מתקדמים - הצגה פרמטרית של פונקציה

תוכן העניינים

158	1. הצגה פרמטרית של עקום.
160	2. הנגורת ו שימושה.
161	3. שימושי האינטגרל המסוים.

הציגה פרמטרית של עקום

שאלות

1) עברו מן הציגה הפרמטרית הנתונה, להציגה קרטזית:

א. $t \geq 0, x = t^2 + 1, y = t^2$

ב. $0 \leq t \leq \pi, x = \sin t, y = \cos^2 t$

ג. $\pi \leq t \leq 2\pi, x = \cos t, y = 4 \sin t$

2) עברו מן הציגה הקרטזית הנתונה, להציגה פרמטרית:

א. $1 \leq x \leq 4, y = x^4 + 1$

ב. $-2 \leq x \leq 2, y = -\sqrt{4-x^2}$

ג. $-2 \leq x \leq 2, y = +\sqrt{4-x^2}$

3) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t , מצאו משווה מתאימה,
שבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x = t - 4, y = t^2$

ב. $x = -4 + \cos t, y = 1 + 2 \sin t$

ג. $x = 4 + \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$

ד. $x = t(t+1) + 1, y = t(0.5t+1) + 1$

ה. $x = \frac{20t}{4+t^2}, y = \frac{20t-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x = ke^t + ke^{-t}, y = ke^t - ke^{-t}$

תשובות סופיות

$$y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1 . \text{ ב} \quad y = x - 1, x \geq 1 . \text{ א} \quad (1)$$

$$x^2 + \frac{y^2}{16} = 1, -1 \leq x \leq 1, y \leq 0 . \text{ ג}$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi . \text{ ב} \quad x = t, y = t^4 + 1, 1 \leq t \leq 4 \quad (2)$$

$$x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi . \text{ ג}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} . \text{ ג} \quad (x+4)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1 . \text{ ב} \quad y = (x+4)^2 . \text{ א} \quad (3)$$

$$x^2 - y^2 = 4k^2 . \text{ ג} \quad x^2 + y^2 = 25 . \text{ ח} \quad x^2 - 4xy + 4y^2 = 2y - 1 . \text{ ט}$$

הנגזרת ושימושה

שאלות

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה
 $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases}$
 הנתונה בצורה פרמטרית.

- 2)** נתון העקום $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$
- שרטטו את העקום.
 - חשבו את (x', y) בשלוש דרכים שונות.
 - מצאו את משוואת המשיק לעקום, בנקודת $t = -1$.
 - מצאו את משוואת הנורמל לעקום, בנקודת $t = -1$.

- 3)** נתון העקום $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 - 9 \end{cases}$
- שרטטו את העקום.
 - מצאו את משוואת המשיק לעקום בנקודת $(0, 0)$.
 - מצאו את הנקודות עבורהן המשיק לעקום הוא אופקי,
ואת הנקודות עבורהן המשיק לעקום הוא אנכי.
 - עבור אילו ערכים של t העקום קמור/קעור?

תשובות סופיות

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

2) א. ראו בסרטון. ב. $y' = \frac{-2}{2t+1}$. ג. $y = 2x+3$. ד. $y = -0.5x+3$.

3) א. ראו בסרטון. ב. $y = \pm\sqrt{3}x$. ג. אופקי- $(0, -9)$ אנכי- $(-9, 0)$.
 ד. $-1 < t < 1$ או $t > 1$ קמור. כ. $-1 < t < 1$ קעור.

שימושי האינטגרל המסוים

1) חשבו את השטח הכלוא בעקום $C: \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 4t \end{cases}$

2) חשבו את השטח הכלוא בתחום האלייפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $0 < a, b >$, * שימו לב שאם $a = b$, נקבל שטח הכלוא בתחום מעגל עם רדיוס r .

3) חשבו את השטח הכלוא בין העקומים $y = t + \sin t$ ו- $x = \cos t$, בין ציר ה- x .

4) חשבו את השטח הכלוא בין העקומים $y = \sin^2 t$ ו- $x = 4 \cos t$, בין ציר ה- x .

5) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

6) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, (-1, \pi)$, מהנקודה $(1, 0)$ לנקודה $(-1, \pi)$.

7) חלקיים נס לארוך מסלול, המוגדר על ידי הציגה הפרמטרית $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

מצאו את המרחק שהחליק עבר והשו אותו לארוך העקום עצמו.

8) חlek העקום $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}, t = 0$ ל- $t = \pi$, מסתובב סביב ציר ה- x . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

9) חlek העקום $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, t = 0$ ל- $t = \frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y . מהו שטח המעטפת הנוצרת?

10) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4 \sin t \\ y = 10t \\ z = 4 \cos t \end{cases}, -\pi \leq t \leq 2\pi$

. $1 \leq t \leq 3$, $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t)\mathbf{k}$ **11)** חשבו את אורך העקום

תשובות סופיות

(1) $8/3$

(2) πab

(3) 1.5π

(4) $16/3$

(5) 8

(6) 4

(7) אורך העקום הוא 2π . המרחק שעבר החלקיק הוא 4π .

(8) $4\pi r^2$

(9) $6\pi/5$

(10) $6\pi\sqrt{29}$

(11) $\sqrt{3}e(e^2 - 1)$